**УДК 622**

**МРНТИ 52.29.01**

**В.В. Чигиринский, А.Р. Сырлыбаев\***

НАО «Рудненский индустриальный университет», Казахстан

\*(e-mail: [syrlybaev-2001@mail.ru](mailto:syrlybaev-2001@mail.ru))

**ИССЛЕДОВАНИЕ ВЛИЯНИЕ ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЙ КОНТАКТНОЙ ЗАДАЧИ НА РАСПРЕДЕЛЕНИЕ НАПРЯЖЕНИЙ В ПОЛУБЕСКОНЕЧНОМ ПРОСТРАНСТВЕ**

**Аннотация:** Как известно, при осуществлении подземных выработок на карьерах большое внимание уделяют устойчивости горных пород, и в том числе особенностям напряженно-деформированного состояния массивов. При этом возникающие проблемы в большей степени вызваны сложностью строительства и поддержания горно-капитальных выработок в тектонически напряженных низкопрочных массивах трещиноватых скальных горных пород. В таких условиях, несмотря на сравнительно высокую прочность горных пород в образцах, нарушения устойчивости приконтурного массива подземных выработок происходят даже при сравнительно небольших обнажениях и невысоком уровне напряжений и деформаций. Поэтому целью проведенного исследования является разработка методики расчетов напряженного состояния полупространства под действием массивных тел в условиях шероховатой контактной поверхности. Предложенная методика для осуществления запланированных исследований заключалась в вычислении напряженного состояния упругого полупространства под действием массивного тела в условиях шероховатой контактной поверхности. В ходе проведенных исследований, на базе метода аргумент функций и метода функций комплексного переменного, были получены обобщающие решения плоской задачи теории упругости с использованием инвариантных дифференциальных соотношений, способных замкнуть результат для поставленной системы уравнений.

*Ключевые слова:* теория упругости, аргумент функции, соотношения Коши-Римана, уравнения Лапласа, граничные условия

**Введение**

В механике грунтов рассматриваются общие закономерности взаимодействия под нагрузкой горных пород разной деформируемости, устойчивости и прочности. Для создания математической модели напряженно-деформированного состояния грунтов используются разные направления механики сплошной среды: теоретическая механика, теория упругости, пластичности, теория динамических процессов и т.д. Предварительный анализ показывает, что нагружения горных пород происходит по разным причинам и при разных условиях их взаимодействия. Это значительно усложняют задачу с практической точки зрения. Возникает необходимость оценки напряженного состояния при: создании искусственных откосов, каналов, дамб и карьеров.

При реализации подземных выработок большое внимание уделяют устойчивости горных пород, и особенностям напряженно деформированого состояния массивов. Основные проблемы вызваны сложностью строительства и поддержания горно-капитальных выработок в тектонически напряженных низкопрочных массивах трещиноватых скальных горных пород. В данных условиях, несмотря на сравнительно высокую прочность горных пород в образцах, нарушения устойчивости приконтурного массива подземных выработок происходят даже при сравнительно небольших обнажениях и невысоком уровне напряжений и деформаций. В подземных выработках на прочность массива влияют: многочисленные хаотичные трещины и разно-ориентированные тектоническими нарушениями на структурные блоки. Вероятностная природа и пространственно-временная изменчивость данных показателей обуславливают необходимость в проведении натурных инструментальных исследований на различных масштабных уровнях.

Основные задачи, которые возникают в процессе освоения полезных ископаемых, это создание условий, обеспечивающих устойчивость, прочность и надежность породных массивов, позволяющих эффективно и безопасно реализовывать технологические режимы добычи полезных ископаемых. Следует отметить, что ежегодный ущерб от оползневых явлений во всем мире составляет огромные суммы, соизмеряемые с ущербами от землетрясений, такое же соотношение с человеческими жертвами. Поэтому проблема количественного прогнозирования устойчивости, ползучести и прочности склонов и откосов имеет первостепенное народно-хозяйственное значение.

Задачами, проводимых в данной работе исследований, являются: разработка математической модели напряженного состояния полупространства в условиях шероховатой контактной поверхности; исследования напряженного состояния упругого полупространства под действием массивного тела в условиях шероховатой контактной поверхности; анализ полученного результата распределения нормальных и касательных напряжений в глубине массива.

**Материалы и методы**

Из литературных данных, приведенных в работах [1-4] видно, что изучения напряженного состояния в упругом и пластическом полупространстве в горных массивах разной глубины представляет собой актуальную проблему механики сплошной среды. В решениях на современном этапе эффективно используется метод аргумент функции комплексной переменой, однако из представленных анализов видно, что влияние касательных напряжений представлено не в совсем полной мере, что не позволяет адекватно оценить его влияния на прочностные характеристики горных пород. Возникает необходимость на современном уровне выполняемых решений, усилить известные решения и обеспечить реальную достоверность полученного результата.

Для плоской задачи выбраны три уравнения теории упругости, два дифференциальных уравнения равновесия, условие неразрывности деформации через напряжения и граничные условия:

*, ,* (1)

Имеем граничные условия в напряжениях:

(2)

В работе [3] представлены решения плоской задачи теории упругости в декартовых координатах. Аналитическое решения данной задачи представлено в виде:

*,*

*,* (3)

*,*

при *.*

где ,, – компоненты тензора напряжений; – среднее нормальное напряжение.

С учетом граничных условий выражение (3) было представлено в виде;

(4)

Показатель экспоненты и аргумент тригонометрической функций АФ были получены из уравнений Лапласа и соотношений Коши-Римана. В соответствии с поставленной задачей они должны быть удовлетворены граничные условия по напряжениям, т.е.:

*,*  (5)

**Результаты**

В соответствии с формулой (5), были рассчитаны контактные напряжения и напряжения в глубине массива, рисунок 1.

Из решения (4) видно, что нулевые касательные напряжения не отрицают их наличие в глубине полупространства. Получено устойчивая затухающая функция в глубину полупространства и вогнутая эпюра контактных нормальных напряжений, которая ранее определялась в классических решениях [1-2].



Рисунок 1 - Распределение нормальных напряжений на контакте и в глубине полупространства при действии плоского штампа без учета трения

При такой постановке вопроса теоретический и практический представляет интерес для решения задачи шероховатой контактной поверхности. Рассмотрим решение плоской задачи теории упругости в условиях шероховатой контактной поверхности.

Разработка математической модели напряженного состояния полупространства в условиях шероховатой контактной поверхности.

Воспользуемся постановкой задачи (1) и граничными условиями (2). Упрощая граничные условия через тригонометрическую подстановку вводится в рассмотрение первая аргумент функция АФ. Из условия решения вводится вторая аргумент функция , определяющая фундаментальную подстановку . С учетом тригонометрической и фундаментальной подстановки в уравнение неразрывности деформации с учетом функции комплексной переменной [6] получено дифференциальное уравнения в виде:

(6)

Операторы в формуле (6), находящиеся возле экспонента, содержат одинаковые вторые производные по координатам и нелинейности. Если в силу каких-то причин операторы равны нулю, то имеет место тождество. Распишем нелинейности в операторах и перегруппируем их.

,

Из этого следует что данное дифференциальное уравнение будет удовлетворено тогда, когда выполняется соотношения Коши-Римана и уравнения Лапласа:

*,*

(7)

*.*

Отсюда существует возможность в получении нового решения при взаимодействии тел с шероховатой контактной поверхностью. В результате решения дифференциальных уравнений (7), имеем:

*,* (8)

Функция (8) удовлетворяет уравнение Лапласа, т.е. имеем:

Таким образом уравнение (8) определяет новые граничные условия, которые будут связаны с шероховатостью контактной поверхности. Через соотношения Коши-Римана определяется вторая аргумент функция . Показатель экспоненты запишется в виде:

. (9)

С учетом выражения (8) и (9) нормальное и касательное напряжение принимает вид;

*,*

(10)

На основании анализа полученных выражений (10) установлено, что:

где *f* и *b*- коэффициент трения на контактной поверхности и полуширина массивного основания.

Граничные условия вида: при *x= b, y= 0, σy= k1,* *τxy=f · k1, АФ= АФ1, θ= θ*1. Подставляя граничные условия в решение (4) находим постоянную *AA6*:

В итоге разработана математическая модель напряженного состояния полупространства в условиях шероховатой контактной поверхности.

**Обсуждение**

На основании выражений (10), были проведены исследования напряженного состояния массива при действии массивных внешних тел с шероховатой контактной поверхностью. На рисунках 2 и 3 показаны распределения контактных нормальных и касательных напряжений в глубину массива с учетом влияния ширины основания, а также коэффициента трения.

Сопоставляя результаты исследования с данными других авторов, убеждаемся в том, что они в качественном и количественном отношении совпадают. На контакте со штампом в полубесконечном пространстве эпюра нормальных контактных напряжений имеет вогнутый характер. Это свидетельствует о достоверности полученного результата. В глубине пространства имеет место затухание напряженного состояния среды к нулевой отметке.

Как показывает анализ под действием максимальных касательных напряжений развиваются линии скольжения в массивах, которые опасны тем, что они являются источниками сдвигов, обрушений и проседанию породных массивов. Видны распределения касательных напряжений, величины которых максимальны на глубине 70, в угловых зонах нагружения такое напряженное состояние грунтов показывает возможности разрушения под действием касательных напряжения с учетом коэффициентом трения.

Рисунок 2 - Распределение нормального напряжения на контакте и в глубине массива с коэффициентом трения f=0,3 и с шириной b=60

Рисунок 3 - Распределение касательных напряжений на контакте и в глубине массива с коэффициентом трения f=0,3 и с шириной b=60

На рисунке 4 показано влияния коэффициента трения f=0,1 – 0,5 на распределения нормальных напряжений в глубину по краям штампа x= b и в центре x= 0, с шириной основания b=60. На рисунке 5 показано влияние коэффициента трения f=0,1 – 0,5 на распределения касательных напряжений в глубину по краям штампа x= b, с шириной основания b= 60. На рисунке 6 показано влияние ширины основания b=20 – 100 на распределения нормальных напряжений в глубину по центру x=0, с коэффициентом трения f= 0,3

Из полученных графиков (рисунок 4) видно, что с увеличением коэффициента трения глубина затухания нормальных напряжений не значительно увеличивается. Из рисунка 1 видно, что металл течет из зоны большого нагружения в зону меньшего нагружения. Судя по рисунку металл из центра растекается в горизонтальной оси в противоположном направлении, это дает касательное напряжение одного знака. Касательные напряжения в приконтактных слоях перемещается к центру такое положение объясняется переменой знака на контакте (зона затрудненных деформаций) рисунок 5. С увеличением коэффициента трения глубина максимального касательного напряжения увеличивается, а глубина затухания идентична нормальному напряжению. Также показано (рисунок 6) что с увеличением ширины основания глубина затухания нормальных напряжений значительно увеличивается.

Рисунок 4 - Распределение нормальных напряжений на контакте и в глубине массива по краям штампа и в центре с шириной основания b=60

Рисунок 5 - Распределение касательных напряжений на контакте и в глубине массива по краям штампа с шириной основания b=60

Рисунок 6 - Распределение нормальных напряжений на контакте и в глубине массива в центре штампа, с разными ширинами с коэффициентом трения f=0,3

**Заключение**

В ходе проведенных исследований была разработана математическая модель напряженного состояния полупространства в условиях шероховатой контактной поверхности. Сравнительный анализ результатов исследования напряженное состояние упругого полупространства под действием массивного тела в условиях гладкой и шероховатой контактной поверхности показал, что нормальные напряжения с гладкой поверхностью по центру равны 1, а по бокам 1,4, а шероховатая контактная поверхность на контакте имеет по центру напряжения 1, а по бокам 1,1. При этом нормальные напряжения с гладкой поверхностью затухают на глубине 400, а с шероховатой затухает на уже глубине 300. Анализ полученные результаты распределения нормальных и касательных напряжений в глубине массива показал, что чем больше ширина основания тем на большей глубине затухают нормальные напряжения.

**СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ**

1 Бартоломей, А.А. Механика грунтов: учебник для студентов / А.А. Бартоломей. - М.: АСВ, 2003. - 304 с.

## 2 Тимошенко, С.П. Теория упругости / С.П. Тимошенко, Дж. Гудьер. - М.: Главная редакция физико-математической литературы, 1979. – 560 с.

3 Chigirinsky, V. Development of a dynamic model of transients in mechanical systems using argument functions / V. Chigirinsky, A. Putnoki // Eastern-European Journal of Enterprise Technologies. – 2017. – Vol. 3/7. - P. 11-21.

**REFERENCES**

## 1 Bartolomej, A.A. (2003). *Mekhanika gruntov: uchebnik dlya studentov [Soil mechanics: a textbook for students]*. - M.: ASV [in Russian].

## 2 Timoshenko, S.P., & Gud'er, J. (1979) Teoriya uprugosti [Theory of elasticity]. - M.: Glavnaya redakciya fiziko-matematicheskoj literatury [in Russian].

3 Chigirinsky, V. Development of a dynamic model of transients in mechanical systems using argument functions / V. Chigirinsky, A. Putnoki // Eastern-European Journal of Enterprise Technologies. – 2017. – Vol. 3/7. - P. 11-21.

**В.В. Чигиринский, А.Р. Сырлыбаев\***

"Рудный индустриялық университеті" КЕАҚ, Қазақстан

\*(e-mail: [syrlybaev-2001@mail.ru](mailto:syrlybaev-2001@mail.ru))

**ЗЕРТТЕУ БАЙЛАНЫС МӘСЕЛЕСІНІҢ ШЕКАРАЛЫҚ ЖАҒДАЙЛАРЫНЫҢ ЖАРТЫЛАЙ ШЕКСІЗ КЕҢІСТІКТЕГІ КЕРНЕУЛЕРДІҢ ТАРАЛУЫНА ӘСЕРІ**

Өздеріңіз білетіндей, карьерлерде жерасты қазбаларын жүзеге асыру кезінде тау жыныстарының тұрақтылығына, оның ішінде массивтердің кернеулі-деформацияланған күйінің ерекшеліктеріне көп көңіл бөлінеді. Бұл ретте туындайтын проблемалар көбінесе жарылған тау жыныстарының тектоникалық кернеуі төмен, беріктігі төмен массивтерінде тау-кен қазбаларын салу мен күтіп ұстаудың күрделілігінен туындайды. Мұндай жағдайларда, үлгілердегі тау жыныстарының салыстырмалы түрде жоғары беріктігіне қарамастан, жер асты қазбаларының контурға жақын массивінің тұрақтылығының бұзылуы тіпті салыстырмалы түрде аз экспозицияларда және кернеулер мен деформациялардың төмен деңгейінде болады. Сондықтан зерттеудің мақсаты-дөрекі жанасу бетіндегі массивтік денелердің әсерінен жартылай кеңістіктің кернеулі күйін есептеу әдістемесін жасау. Жоспарланған зерттеулерді жүзеге асырудың ұсынылған әдісі дөрекі байланыс беті жағдайында массивті дененің әсерінен серпімді жартылай кеңістіктің кернеу күйін есептеу болды. Жүргізілген зерттеулер барысында функциялар аргументі әдісі мен күрделі айнымалы функциялар әдісі негізінде берілген теңдеулер жүйесі үшін нәтижені жабуға қабілетті инвариантты дифференциалдық қатынастарды қолдана отырып, серпімділік теориясының жалпылама шешімдері алынды.

*Кілт сөздер:* серпімділік теориясы, функция аргументі, Коши-Риман қатынасы, Лаплас теңдеулері, шекаралық шарттар

**V.V. Chigirinsky, A.R. Syrlybaev \***

NPJSC "Rudny Industrial University", Kazakhstan

\*(e-mail: [syrlybaev-2001@mail.ru](mailto:syrlybaev-2001@mail.ru))

**INVESTIGATION OF THE INFLUENCE OF THE BOUNDARY CONDITIONS OF THE CONTACT PROBLEM ON THE STRESS DISTRIBUTION IN A SEMI-INFINITE SPACE**

As is known, when carrying out underground workings in quarries, great attention is paid to the stability of rocks, including the peculiarities of the stress-strain state of massifs. At the same time, the problems that arise are mostly caused by the complexity of building and maintaining mining and capital workings in tectonically stressed low-strength massifs of fractured rocky rocks. In such conditions, despite the relatively high strength of rocks in the samples, violations of the stability of the contour array of underground workings occur even with relatively small outcrops and a low level of stresses and deformations. Therefore, the purpose of the study is to develop a methodology for calculating the stress state of a half-space under the action of massive bodies in conditions of a rough contact surface. The proposed method for carrying out the planned studies consisted in calculating the stress state of an elastic half-space under the action of a massive body under conditions of a rough contact surface. In the course of the conducted research, on the basis of the method of argument of functions and the method of functions of a complex variable, generalizing solutions of the plane problem of elasticity theory were obtained using invariant differential relations capable of closing the result for the set system of equations.

*Keywords:* elasticity theory, function argument, Cauchy-Riemann relations, Laplace equations, boundary conditions

**Сведения об авторах:**

**Чигиринский В.В.** - техника ғылымдарының докторы, "Рудный индустриялық университеті" КЕАҚ профессоры, Рудный қ., Қазақстан Республикасы. **Чигиринский В.В.** - доктор технических наук, профессор НАО «Рудненский индустриальный университет», г. Рудный, Республика Казахстан. **Chigirinsky V.V.** - Doctor of Technical Sciences, Professor, NPJSC "Rudny Industrial University", Rudny, Republic of Kazakhstan. E-mail: chigirinvv18@gmail.com

**Сырлыбаев А.Р.** - "Рудный индустриялық университеті" КЕАҚ магистранты, Рудный қ., Қазақстан Республикасы. **Сырлыбаев А.Р.**- магистрант НАО «Рудненский индустриальный университет», г. Рудный, Республика Казахстан. **Syrlybaev А.R.**- graduate student of the NAO "Rudny Industrial University", Rudny, Republic of Kazakhstan. E-mail: [syrlybaev-2001@mail.ru](mailto:syrlybaev-2001@mail.ru)

**Дата поступления рукописи в редакцию:**