Как видно из таблицы 5, из распространенных в Закатальском государственном заповеднике 8 групп фитоценозов, доминируют двудольные (65%). Это связано с рельефом и климатическими условиями данной территории. На исследованной территории наиболее редко встречаются грибы (0,5%) и однодольные (0,5%).

Выводы. На территории Закатальского государственного заповедника произрастает около 900 видов растений, которые распространены по поясам, согласно вертикальной зональности. Из этих растений 11 видов (1,2%) составляют водоросли, 45 видов (5%) – грибы, 58 видов (6,4%) – лишайники, 49 видов (5,4%) – мхи, 23 вида (2,5%) – высшие споровые, 5 видов (0,5%) – голосеменные, 130 видов (14%) – однодольные, 677 видов (65%) – двудольные растения. А урожайность плодовых растений меняется в зависимости от благоприятных условий.

Литература

1. Бейдман И.Н. В Закатальском заповеднике // Сб. экспедиции АН СССР. – 1973. – с.71-84.
2. Гаджиев В.Д. Очерки растительности Закатальского заповедника. – Баку: АН Азерб.ССР. – 1954. – 69 с.
3. Бейдман И.Н. Эколого-биологические смены растительного покрова (на примере изменчивости Восточного закавказья) // Ботанический журнал. – 1953. – Т. 38. – № 4. – С. 475-484.
4. Прилипко Л.И. Лесная растительность Азербайджана. – Баку: АН Азерб.ССР, 1954. – 485 с.
5. Whittaker R.H. Netproduction of health balds and foresthealths in the Creath Smoky Mountains // Ecology. – 1963. – V. 44. – № 1. – P.644-646.
6. Келлер Б.А. Главные типы и основные закономерности в растительности СССР. – М-Л., 1938. – Т. 1. – С. 133-182.
7. Кулиев В.С., Халилов М.Ю. Вечнозеленые деревья и кустарники Азербайджана. – Баку, 1998. – 80 с.
8. Мамедов Г.С., Халилов М.Ю. Леса Азербайджана. – Баку: Элм, 2002. – С. 302.

УДК 378.14:377.5 (574)

НЕКОТОРЫЕ ЗАДАЧИ НА ДЕЛИМОСТИ И РАВЕНСТВА МНОГОЧЛЕНОВ

Б.А. Жумиров, магистрант, учитель
Областной казахско-турецкий лицей-интернат для одаренных детей (г. Павлодар)
E-mail: zhumirov@mail.ru
Ж.Ж. Жумирова, магистрант, учитель
Специализированная школа «Жас дарын» (г. Павлодар)
E-mail: jamilja-87@mail.ru

Берілген мақалада басты формула мен есептер базасы берілген, оларды қолдана отырып квадраттық көпмүшені өзгеше методтармен үйренуге болады. Және де олардың өзгеше шешімдері, соларды қолдана отырып оқушыларға үйретуге болады. Есептер көпмүшелерді квадрат көпмүшеге бөлуді және теңдіктер тақырыбына құрастырылған.

Данная статья содержит основную формулу и базу задач на нетрадиционный подход к изучению квадратичных трехчленов, а также их неординарные решения, которые преподаватели могли бы применять в обучении детей. Задачи подобраны на делимость и равенства многочленов на квадратный многочлен.

This article provides a basic formula and question bank on non-traditional method of study of quadratic trinomials and their innovative solutions that teachers could use in teaching children. Problems are based on divisibility of polynomials to quadratic binomials.

В данной статье мы рассмотрим применение нетрадиционного подхода к изучению делимости многочленов на квадратные трехчлены, как функцию от переменного x и коэффициентов в общем виде [1], а также некотрые задачи и их решение новым методом.

Теорема 1. Пусть $a,b,c \in R; a \neq 0; D = b^2 - 4ac$, тогда $y(x) = ax^2 + bx + c$ представляется в виде:

$$y(x) = \varepsilon_a \left((\sqrt{|a|} \cdot x + \frac{b}{2\varepsilon_a \left(\sqrt{|a|}\right)} \right)^2 + \varepsilon_{(-D)} \cdot \left(\frac{\sqrt{|D|}}{2\varepsilon_a \sqrt{|a|}} \right)^2 . \quad (1)$$

Следствие 1. Пусть $a > 0$, $\varepsilon_a = +1$ и $\sqrt{|a|} = \sqrt{a}$, $|a| = a$. Тогда верно равенство:

$$y(x) = +\left(\sqrt{a}\cdot x + \frac{b}{2\sqrt{a}}\right)^2 + \varepsilon_{(-D)}\left(\frac{\sqrt{|D|}}{2\sqrt{a}}\right)^2 \qquad (2)$$

При любом знаке $D = b^2 - 4ac$.

В этом случае ветви графика функции $y(x)$ направлены вверх (в положительную сторону оси OY).

Следствие 2. Пусть $a < 0$, $\varepsilon_a = -1$, $|a| = \varepsilon_a a$, $\varepsilon_a |a| = a$. Тогда верно равенство:

$$y(x) = -\left[\left(\sqrt{|a|}\cdot x + \frac{b}{2\varepsilon_a\sqrt{|a|}}\right)^2 + \varepsilon_{(-D)}\left(\frac{\sqrt{|D|}}{2\varepsilon_a\sqrt{|a|}}\right)^2\right] \qquad (3)$$

В этой статье фактически будут рассматриваться три задачи на делимости общих многочленов на квадратные трехчлены и равенства многочленов.

Для начала рассмотрим задачи частного вида, которые делятся на квадратный круговой многочлен:

1. Доказать что для всех натуральных x, многочлен $f_5(x) = (x+1)^5 + x^4$ делится на круговой многочлен $x^2 + x + 1$.

Произведем преобразование в правой части $f_5(x) = (x+1)^5 + x^4$. Имеем:

$$\begin{aligned}
&(x+1)^2(x+1)^3 + x^4 = (x^2 + 2x + 1)(x+1)^3 + x^4 = \\
&= (x^2 + x + 1)(x+1)^3 + x\cdot(x+1)^3 + x^4 = \\
&= (x^2 + x + 1)(x+1)^3 + x^4 + 3x^3 + 3x^2 + x + x^4 = \\
&= (x^2 + x + 1)(x+1)^3 + 2x^4 + 3x^3 + 3x^2 + x = \\
&= (x^2 + x + 1)(x+1)^3 + 3x^2(x^2 + x + 1) - x^4 + x = \\
&= (x^2 + x + 1)((x+1)^3 + 3x^2) - x(x^3 - 1) = \\
&= (x^2 + x + 1)(x^3 + 3x^2 + 3x + 1 + 3x^2) - x(x-1)(x^2 + x + 1) = \\
&= (x^2 + x + 1)(x^3 + 3x^2 + 3x + 1 + 3x^2 - x^2 + x) = \\
&= (x^2 + x + 1)(x^3 + 5x^2 + 4x + 1).
\end{aligned}$$

Следовательно,

$$(x^2 + x + 1)(x^3 + 5x^2 + 4x + 1) \vdots (x^2 + x + 1).$$

Для полноты картины рассмотрим еще одну задачу:

2. Доказать, что многочлен $f_7(x) = (x+1)^7 + x^5$ делится на круговой многочлен $x^2 + x + 1$.

Произведем преобразование:

$$\begin{aligned}
&(x+1)^7 + x^5 = (x+1)^2(x+1)^5 + x^5 = \\
&= (x^2 + 2x + 1)(x+1)^5 + x^5 = \\
&= (x^2 + x + 1)(x+1)^5 + x(x+1)^5 + x^5 = \\
&= (x^2 + x + 1)(x+1)^5 + x(x^5 + 5x^4 + 10x^3 + 10x^2 + 5x + 1) + x^5 = \\
&= (x^2 + x + 1)(x+1)^5 + x^6 + 5x^5 + 10x^4 + 10x^3 + 5x^2 + x + x^5 = \\
&= (x^2 + x + 1)(x+1)^5 + x^6 + 5x^3(x^2 + x + 1) + 5x^2(x^2 + x + 1) + x + x^5 = \\
&= (x^2 + x + 1)(x^5 + 5x^4 + 10x^3 + 10x^2 + 5x + 1 - 5x^3 - 5x^2) + x^6 + 5x^5 + x^4 - x^4 + x = \\
&= (x^2 + x + 1)(x^5 + 5x^4 + 5x^3 + 5x^2 + 5x + 1) + x^4(x^2 + x + 1) - x(x^3 - 1) = \\
&= (x^2 + x + 1)(x^5 + 5x^4 + 5x^3 + 5x^2 + 5x + 1 + x^4) - x(x-1)(x^2 + x + 1) = \\
&= (x^2 + x + 1)(x^5 + 6x^4 + 5x^3 + 4x^2 + 6x + 1).
\end{aligned}$$

Следовательно,

$$\left(x^2+x+1\right)\left(x^5+6x^4+5x^3+4x^2+6x+1\right)\vdots\left(x^2+x+1\right).$$

Нами показано, что при $n=0;1$ эти многочлены делятся на $\left(x^2+x+1\right)$. Покажем, что они делятся на любой натуральный n.

Предполагая решение для частных случаев, применяем его для решения общего случая.

Теорема 2. Доказать, что для любого значения при $n\in Z_+$ многочлен $f_{2n+1}(x)=(x+1)^{2n+1}+x^{n+2}$ делится на круговой многочлен $\left(x^2+x+1\right)$ [2].

Доказательство общего случая приведем методом математической индукции.

1. Проверяем данное утверждение при $n=0$. В этом случае $(x+1)^{2n+1}+x^{n+2}=x^2+x+1$.
2. Предполагаем, что утверждение верно и при n от 0 до k.
   То есть $(x+1)^{2k+1}+x^{k+2}\vdots x^2+x+1$.
3. Доказываем, что $n=k+1$

$$(x+1)^{2(k+1)+1}+x^{k+2+1}=(x+1)^{2k+3}+x^{k+3}=(x+1)^{2k+1}\cdot(x+1)^2+x\cdot x^{k+2}=$$
$$=\left(x^2+2x+1\right)(x+1)^{2k+1}+x\cdot x^{k+2}=$$
$$=\left(x^2+x+1\right)(x+1)^{2k+1}+x(x+1)^{2k+1}+x\cdot x^{k+2}=$$
$$=\left(x^2+x+1\right)(x+1)^{2k+1}+x\left((x+1)^{2k+1}+x^{k+2}\right).$$

То есть $\left(x^2+x+1\right)(x+1)^{2k+1}+x\left((x+1)^{2k+1}+x^{k+2}\right)$ делится на $\left(x^2+x+1\right)$.

Что и требовалось доказать.

Второй пример несколько отличается от предыдущих многочленов.

Теорема 3. Доказать, что при любых значениях $n\in N$ и $\alpha\in R$, удовлетворяющих условиям $n>1$ и $\sin\alpha\neq 0$, многочлен $f_n(x,\alpha)=x^n\sin\alpha-x\sin n\alpha+\sin(n-1)\alpha$ делится на многочлен $Q(x)=x^2-2x\cos\alpha+1$.

Замечание. Здесь «делимость» понимается в широком смысле этого слова, то есть, $\left(x^2+x+1\right)$ содержится в составе $f_n(x,\alpha)$. Другими словами $f_n(x,\alpha)\vdots Q(x)$ относительно поля R - действительных чисел.

Многочлен $Q(x)$ представим в виде суммы двух квадратов.

Следовательно, многочлен $Q(x)=x^2-2x\cos\alpha+1$ представим в виде $Q(x)=(x-\cos\alpha)^2+\sin^2\alpha$.

Действительно, $Q(x)=(x-\cos\alpha)^2+\sin^2\alpha=x^2-2x\cos\alpha+\cos^2\alpha+\sin^2\alpha=x^2-2x\cos\alpha+1$.

Обозначим $x_\varepsilon=\cos\varepsilon\alpha+i\varepsilon\sin\alpha$, где $\varepsilon\in\{-1;1\}$.

Если возведем это выражение в n-ную степень, то получим формулу Муавра.

$x_\varepsilon^n=(\cos\varepsilon\alpha+i\varepsilon\sin\alpha)^n=\cos\varepsilon n\alpha+i\sin\varepsilon n\alpha=\cos n\alpha+i\varepsilon\sin n\alpha$. Тогда многочлен $f_n(x,\alpha)=x^n\sin\alpha-x\sin n\alpha+\sin(n-1)\alpha$ представится в виде:

$$f_n(x,\alpha)=(\cos n\alpha+\varepsilon i\sin n\alpha)^n\sin\alpha-(\cos\alpha+\varepsilon i\sin\alpha)\sin n\alpha+\sin(n-1)\alpha=$$
$$=\cos n\alpha\sin\alpha-\cos\alpha\sin n\alpha+\sin(n-1)\alpha=\sin(1-n)\alpha+\sin(n-1)\alpha=0.$$

Отсюда заключаем, что, согласно теореме Безу, многочлен $f_n(x,\alpha)$ делится на $Q(x)=(x-\cos\alpha)^2+\sin^2\alpha$.

Рассмотрим частный случай: Пусть $\alpha=120^0$, а $n=2$.

Тогда $f_n(x,\alpha) = x^2\sin\alpha - x\sin 2\alpha + \sin(2-1)\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}x^2 - \frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2} = x + x + 1$, а

$$Q(x) = x^2 + 2x \cdot \frac{1}{2} + 1 = x^2 + x + 1 = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{|-3|}}{2}\right)^2 = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2.$$

Легко увидеть, что $f_n(x,\alpha)$ делится на $Q(x)$.

Далее рассмотрим одно применение теоремы Виета для кубических многочленов. Начнем с рассмотрения следующего примера:

3. При любых $\alpha \cdot \beta \neq 0$ для корней многочлена $P_{\alpha,\beta}(x) = \alpha x^3 - \alpha x^2 + \beta x + \beta$, если, $P_{\alpha,\beta}(x) = 0$, то $(x_1 + x_2 + x_3)\left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3}\right) = -1$

Доказательство:

1. По теореме Виета для многочлена $x^3 - x^2 + \frac{\beta}{\alpha}x + \frac{\beta}{\alpha}$ имеет место разложение

$$P_{\alpha,\beta} = (x - x_1)(x - x_2)(x - x_2),$$ где x_1, x_2, x_3 - корни.

Отсюда по теореме Виета:

$$x_1 + x_2 + x_3 = 1$$

$$x_1x_2 + x_2x_3 + x_1x_3 = \frac{\beta}{\alpha}$$

$$x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 = -\frac{\beta}{\alpha}$$

Следовательно:

$$(x_1 + x_2 + x_3)\left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3}\right) =$$

$$= (x_1 + x_2 + x_3) \cdot \frac{(x_1x_2 + x_2x_3 + x_1x_3)}{x_1 \cdot x_2 \cdot x_3} =$$

$$= 1 \cdot \frac{\beta}{\alpha} \cdot \left(-\frac{\beta}{\alpha}\right)^{-1} = -1$$

2) Пусть $P_{-\alpha,\beta}(x) = -\alpha x^3 - \alpha x^2 + \beta x + \beta$, при $x_1 + x_2 + x_3 = -1$, $x_1x_2 + x_2x_3 + x_1x_3 = \frac{\beta}{\alpha}$ и $x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 = -\frac{\beta}{\alpha}$, тогда:

$$(x_1 + x_2 + x_3)\left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3}\right) =$$

$$(x_1 + x_2 + x_3) \cdot \frac{(x_1x_2 + x_2x_3 + x_1x_3)}{x_1 \cdot x_2 \cdot x_3} =$$

$$= -1 \cdot \frac{\beta}{\alpha} \cdot \left(-\frac{\beta}{\alpha}\right)^{-1} = 1$$

3) Пусть $P_{\alpha,-\beta}(x) = \alpha x^3 - \alpha x^2 - \beta x - \beta$, при $x_1 + x_2 + x_3 = 1$, $x_1x_2 + x_2x_3 + x_1x_3 = -\frac{\beta}{\alpha}$ и $x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 = \frac{\beta}{\alpha}$ тогда:

$$(x_1 + x_2 + x_3)\left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3}\right) =$$

$$= (x_1 + x_2 + x_3) \cdot \frac{(x_1 x_2 + x_2 x_3 + x_1 x_3)}{x_1 \cdot x_2 \cdot x_3} =$$

$$= 1 \cdot \left(-\frac{\beta}{\alpha}\right) \cdot \left(-\frac{\beta}{\alpha}\right)^{-1} = -1$$

Имеет место общее утверждение:

Теорема 4. Пусть $x^3 + ax^2 + bx + c$ – кубический многочлен третьей степени, с коэффицентами $a;b;c$, где $c \neq 0$, $x_1, x_2, x_3 \neq 0$ - корни, то

$$(x_1 + x_2 + x_3)\left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3}\right) = \frac{(-a)b}{-c} = \frac{ab}{c},$$

то есть

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = -a \\ x_1 x_2 + x_2 x_3 + x_1 x_3 = b \Rightarrow (x_1 + x_2 + x_3)\left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3}\right) = \frac{(-a)b}{-c} = \frac{a}{c} \\ x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 = -c \end{cases}$$

Следствие:

Пусть $a = b = c = 1$, тогда для корней кругового многочлена $P(x) = x^3 - x^2 + x - 1$ справедливо равенство:

$$(x_1 + x_2 + x_3)\left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3}\right) = 1 \quad \text{и}$$

$$(x-1)(x+1)(x-1)(x+1) = x^4 - 1,$$

$$P(x) = \frac{x^4 - 1}{x - 1} = (x+1)(x-i)(x+i), \text{ где } i^2 = -1, \text{ а также}$$

$$(-1 + i - i)\left(\frac{-1}{i} + \frac{1}{i} + \frac{1}{-i}\right) = 1.$$

В заключение хотелось бы отметить, что данная работа имеет важное значение для учителей-математиков, студентов, магистрантов, а также для школьников, готовящихся к олимпиаде.

Литература

1. Исмоилов И.Д., Жунусова Ж.Ж. Об одном нетрадиционном способе исследования квадратных трехчленов // Вестник Инновационного Евразийского университета. – 2012. - № 1 (45)
2. Чистяков Н.Н. Замечания к отделу о квадратных уравнениях // Московское просвещение. – 1935. – Вып. № 3.

УДК 511.72.74

ЧИСЛА ФИБОНАЧЧИ И ИХ ОБОБЩЕНИЕ

Б.А. Жумиров, магистрант, учитель
Областной казахско-турецкий лицей-интернат для одаренных детей (г. Павлодар)
E-mail: zhumirov@mail.ru

Берілген мақалада Фибоначчи сандарына қатысты кейбір сұрақтарды қарастырамыз. Сол сұрақтарды мұғалімдер оқушыларына есеп ретінде көрсете алады. Осы мақаланың мақсаты: Фибоначчи сандарның зерттеу және талқылауы, сонымен бірге, ерекше есептердің өзгеше жауаптарының базасын құру. Мақаланың мазмұны Фибоначчи сандардың тарихынан, анықтамасынан, қасиетерінен, есептерден және олардың өзгеше жауаптарынан құрастырылады.

В данной статье рассматриваются некоторые вопросы, связанные с числами Фибоначчи, которые преподаватели могли бы применять в обучении детей. Целью автора является подробное изучение и