УДК 51-3
Д. Исмоилов, доктор физико-математических наук,
Т. Хасанова, Д. Жекебай
Инновационный Евразийский университет (г. Павлодар)
E-mail: i.dodojon@rambler.ru

Некоторые процессы рационализации иррациональностей и двухстороняя оценка одного числового ряда

Аннотация. *В работе рассматриваются некоторые дробно-иррациональное выражение и доказывается утверждение приводящие их к дробно-рациональным выражениям а также рассматривается одна общая оценка снизу и сверху (двухсторонняя оценка) для одного числового ряда.*
Ключевые слова: *дробно-иррациональное, дробно-рациональным, оценка одного числового ряда.*

В настоящей работе исследуется вопрос: как можно класс дробно – иррациональных выражений приводить к дробно – рациональным выражениям, рассматривается также рациональные последовательности и их распределение между целыми числами, а так же исследуется числовой ряд на предмет оценки снизу и сверху.

I. **Постановка задачи**: Пусть $\alpha,\beta,\gamma,\delta$ произвольные вещественные числа, a,b,c вещественные числа удовлетворяющие условиям: $0<a\le b\le c$. Пусть далее $A_n,B_n,C_n,$ и D_n соответственно определены равенствами:

$$A_n=\sqrt{\left(\alpha+\sqrt{\beta}\right)^n}\ ;\ B_n=\sqrt{\left(\alpha-\sqrt{\beta}\right)^n}\ ;\ n=1,2,...$$

$$C_n=\sqrt{\left(\gamma+\sqrt{\delta}\right)^n}\ ;\ D_n=\sqrt{\left(\gamma-\sqrt{\delta}\right)^n}\ ;\ A_n=\sqrt{\left(\alpha+\sqrt{\beta}\right)^n}$$

При каких условиях относительно α,β,γ и δ зависящие от a,b,c, квадратичные иррациональности

$$(1)\qquad Q_n^{(1)}(a,b,c)=\frac{A_n+B_n}{C_n-D_n}\ ;\ Q_n^{(2)}(a,b,c)=\frac{A_n+B_n}{C_n+D_n}$$

будут дробно – рациональными выражениями.

Сформируем первое утверждение, где указывается одно из условии решение поставленной задачи. Возможности других способов решений задачи не исключается.

<u>Теорема 1.</u> Пусть $n=2k+1$

$$(2)\qquad \alpha=\frac{a+b}{2}\ ;\ \beta=a\cdot b\ ;\ \gamma=\frac{b+c}{2}\ ;\ \delta=b\cdot c\,.$$

Тогда справедливо равенство

$$(3)\qquad Q_{2k+1}^{(1)}(a,b,c)=\frac{A_{2k+1}+B_{2k+1}}{C_{2k+1}-D_{2k+1}}=\frac{\sum\limits_{m=0}^{k}C_{2k+1}^{2m+1}\,a^{k-m}\,b^m}{\sum\limits_{m=0}^{k}C_{2k+1}^{2m+1}\,c^{k-m}b^m}$$

где $n=2k+1$; $k=0,1,2,...$; $C_n^m=\dfrac{n!}{m!(n-m)!}$ - биномиальные коэффициенты.

Следует отметить, что при выполнении условий (2), в соответствии с теоремой о «средних» имеют место

$$(4)\qquad \alpha\ge\sqrt{\beta}\ ;\ \gamma\ge\sqrt{\delta}\,,$$

а также по определению a,b,c; $\sqrt{b}\ge\sqrt{a}$; $\sqrt{c}\ge\sqrt{b}$; так, что величины $A_n,B_n,C_n,$ и D_n определены корректно.

Доказательство. Умножим обе части величины $A_n,B_n,C_n,$ и D_n на число $\sqrt{2^{2k+1}}$ и с учетом (2) получим следующие равенства:

$$(5)\qquad \sqrt{2^{2k+1}}\cdot A_{2k+1}=\sqrt{\left(2\alpha+2\sqrt{\beta}\right)^{2k+1}}=\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)^{2k+1},$$

$$(6)\qquad \sqrt{2^{2k+1}}\cdot B_{2k+1}=\sqrt{\left(2\alpha-2\sqrt{\beta}\right)^{2k+1}}=\left(\sqrt{b}-\sqrt{a}\right)^{2k+1},$$

(7) $\sqrt{2^{2k+1}} \cdot C_{2k+1} = \sqrt{\left(2\gamma + 2\sqrt{\delta}\right)^{2k+1}} = \left(\sqrt{b} + \sqrt{c}\right)^{2k+1}$,

(8) $\sqrt{2^{2k+1}} \cdot D_{2k+1} = \sqrt{\left(2\gamma - 2\sqrt{\delta}\right)^{2k+1}} = \left(\sqrt{c} - \sqrt{b}\right)^{2k+1}$

Как известно [1] (или смотри любой учебник по алгебре, где исследуется формула бинома Ньютона) имеем равенства:

(9)
$$\left(x + y\right)^n = \sum_{m=0}^{n} c_n^m x^{n-m} y^m = $$
$$= x^n + c_n^1 x^{n-1} y + \ldots + c_n^m x^{n-m} y^m + \ldots + y^n$$

Аналогично, с учетом свойства биномиальных коэффициентов $C_n^m = C_n^{n-m}$ имеем

(10) $$\left(y - x\right)^n = \sum_{m=0}^{n} \left(-1\right)^m c_n^m y^{n-m} x^m =$$
$$= y^n - c_n^1 y^{n-1} x + \ldots + \left(-1\right)^m C_n^m y^{n-m} x^m + \ldots + (-1)^n x^n;$$

В формулах (9) и (10) положим $n = 2k + 1$; $k = 0,1,2,\ldots;$ Тогда с учетом симметричности биномиальных коэффициентов получим равенство

(11) $$\left(\sqrt{a} + \sqrt{b}\right)^{2k+1} + \left(\sqrt{b} - \sqrt{a}\right)^{2k+1} = 2\sqrt{b} \cdot \sum_{m=0}^{k} C_{2k+1}^{2m+1} a^{k-m} b^m$$

При получении равенство (11) мы воспользовались формулой $C_n^m = C_n^{n-m}$ для биномиальных коэффициентов, затем из суммы левой части (11) видно, что все слагаемы с нечетными номерами сокращаются между собой, а слагаемы с четными номерами, где всюду $\left(\sqrt{a}\right)$ в четной степени а $\sqrt{b}$ в нечетной степени удваиваются и после вывода за скобки множителя $2\sqrt{b}$ все слагаемые остаются свободными от квадратного корня.

Аналогично рассуждая, с учетом неравенства $\sqrt{c} \geq \sqrt{b}$, получим

(12) $$\left(\sqrt{c} + \sqrt{b}\right)^{2k+1} - \left(\sqrt{c} - \sqrt{b}\right)^{2k+1} = 2\sqrt{b} \sum_{m=0}^{k} C_{2k+1}^{2m+1} c^{k-m} b^m$$

Наконец, найдем их отношение

(13) $$\frac{\sqrt{2^{2k+1}} \cdot \left(A_{2k+1} + B_{2k+1}\right)}{\sqrt{2^{2k+1}} \cdot \left(C_{2k+1} - D_{2k+1}\right)} = \frac{\sum_{m=0}^{k} C_{2k+1}^{2m+1} a^{k-m} b}{\sum_{m=0}^{k} C_{2k+1}^{2m+1} c^{k-m} \cdot b^m} =$$

$$= \frac{C_{2k+1}^1 a^k + C_{2k+1}^3 a^{k-1} b + \ldots + C_{2k+1}^{2m+1} a^{k-m} b^m + \ldots + C_{2k+1}^{2k-1} a b^{k-1} + b^k}{C_{2k+1}^1 c^k + C_{2k+1}^3 c^{k-1} b + \ldots + C_{2k+1}^{2m+1} c^{k-m} b^m + \ldots + C_{2k+1}^{2k-1} c \cdot b^{k-1} + b^k};$$

Теорема 1 доказана.

Приведем (численные и теоретические) примеры:

1) Пусть $n = 1$ то есть $k = 0$; В этом случае мы получаем следующее общее утверждение:

При вышеуказанных условиях справедливо тождество

$$\sqrt{\alpha + \sqrt{\beta}} + \sqrt{\alpha - \sqrt{\beta}} + \sqrt{\gamma - \sqrt{\delta}} = \sqrt{\gamma + \sqrt{\delta}}$$

где $0 < a \leq b \leq c; \alpha = \frac{a+b}{2}$; $\beta = a \cdot b$; $\gamma = \frac{b+c}{2}$; $\delta = b \cdot c$; т.е.

(14) $\frac{A_1 + B_1}{C_1 - D_1} = 1$; при любых *a, b, c;* $0 < a \leq b \leq c$.

2) $n = 3$ $\left(k = 1\right)$; Тогда при условиях (2) справедливо равенство

$\frac{A_3 + B_3}{C_3 - D_3} = \frac{3a + b}{3c + b}$; $a = 2,\ b = 3,\ c = 4$ тогда $\alpha = 2{,}5,\ \beta = 6,\ \gamma = 3{,}5,\ \delta = 12$ и следовательно,

$$\frac{A_3+B_3}{C_3-D_3}=\frac{9}{15}=\frac{3}{5}.$$

3) $\frac{A_5+B_5}{C_5-D_5}=\frac{5a^2+10ab+b^2}{5c^2+10cb+b^2}$; $a=2,\ b=3,\ c=4$ тогда $\alpha=2{,}5,\ \beta=6,\ \gamma=3{,}5,\ \delta=12$

и следовательно, $\frac{A_5+B_5}{C_5-D_5}=\frac{5a^2+10ab+b^2}{5c^2+10cb+b^2}=\frac{89}{129}$ и так далее.

Замечание. В случаях $a=b=c$ в равенстве (13) для всех $n=2k+1$; $k=0,1,2,...$; выполняется тождество $A_{2k+1}+B_{2k+1}+D_{2k+1}=C_{2k+1}$, в случае $k=0$ не требуется условие $a=b=c$, оно выполняется для всех $0<a\le b\le c$. Тем самым нами получено утверждение.

Справедливо тождество

$$\sqrt{\alpha+\sqrt{\beta}}+\sqrt{\alpha-\sqrt{\beta}}+\sqrt{\gamma-\sqrt{\delta}}=\sqrt{\gamma+\sqrt{\delta}}$$

где $0<a\le b\le c;\alpha=\frac{a+b}{2}$; $\beta=a\cdot b$; $\gamma=\frac{b+c}{2}$; $\delta=b\cdot c$; т.е.

$\frac{A_1+B_1}{C_1-D_1}=1$; при любых *a, b, c*; $0<a\le b\le c$.

В качестве следствия приведем еще один численный пример теоретического характера.

4) Пусть $a=N$; $b=N+1$; $c=N+2$. Тогда при $n=1,3,...$

$$\alpha=\frac{2N+1}{2};\ \beta=N^2+N;\ c=N^2+3N+3.$$

Тогда: справедливо равенство при любом $k=0,1,2,...$;

$$\frac{A_{2k+1}+B_{2k+1}}{C_{2k+1}-D_{2k+1}}=\frac{\sum_{m=0}^{k}C_{2k+1}^{2m+1}N^{k-m}\cdot(N-1)^m}{\sum_{m=0}^{k}C_{2k+1}^{2m+1}\cdot(N+2)^{k-m}\cdot(N+1)^m}$$

Где

$$A_{2k+1}=\sqrt{\left(\frac{2N+1}{2}\right)+\sqrt{\left(N^2+N\right)}}^{\,2k+1};\ B_{2k+1}=\sqrt{\left(\frac{2N+1}{2}\right)-\left(N^2+N\right)}^{\,2k+1}$$

$$C_{2k+1}=\sqrt{\left[\left(\frac{2N+3}{2}\right)+\sqrt{\left(N^3+3N+3\right)}\right]}^{\,2k+1};\ D_{2k+1}=\sqrt{\left[\left(\frac{2N+3}{2}\right)-\sqrt{N^2+3N+3}\right]}^{\,2k+1}$$

В частности, для $k=0;$ получим тождество

$$\frac{\sqrt{\left(\frac{2N+1}{2}+\sqrt{N^2+N}\right)}+\sqrt{\frac{2N+1}{2}-\sqrt{N^2+N}}}{\sqrt{\frac{2N+3}{2}+\sqrt{N^2+3N+3}}-\sqrt{\frac{2N+3}{2}-\sqrt{N^2+3N+3}}}=1;$$

Продолжим наши исследования, рассмотрим случай $n=2k$ - четные. Имеет место утверждение.

Теорема 2. При $n=2k$; $k=0,1,2,...;\ 0<a\le b\le c$ а также при выполнении условий (2), справедлива формула:

$$Q=\frac{A_{2k}+B_{2k}}{C_{2k}+D_{2k}}=\frac{a^k+\sum_{m=0}^{k}C_{2k}^{2m}a^{k-m}b^m}{c^k+\sum_{m=0}^{k}C_{2k}^{2m}c^{k-m}b^m} \qquad (15)$$

Доказательство этого утверждения проводится аналогично доказательству теореме 1. Здесь ситуация как будто бы несколько яснее, но это не совсем так за исключением небольших *k*. Здесь основную роль играют также равенства типа (5)-(11).

Для ясности изложения рассмотрим некоторые частные случаи: $k = 1, 2, \ldots$

1) Пусть $k = 1$; $n = 2$; остальные условия из теоремы 1 сохраняются, тогда после вычисления величин $A_2;\ B_2;\ C_2;\ D_2$ имеем

$$A_2 + B_2 = \sqrt{\left(\alpha + \sqrt{\beta}\right)^2} + \sqrt{\left(\alpha - \sqrt{\beta}\right)^2} \Rightarrow A_2 + B_2 = \sqrt{\left(a + 2\sqrt{a \cdot b} + b\right)^2} +$$

$$+\sqrt{\left(a - 2\sqrt{a \cdot b} + b\right)^2} = \left(\sqrt{a} + \sqrt{b}\right)^2 + \left(\sqrt{b} - \sqrt{a}\right)^2 = (a + b)$$

Аналогично

$$C_2 + D_2 = \sqrt{\left(\gamma + \sqrt{\delta}\right)^2} + \sqrt{\left(\gamma - \sqrt{\delta}\right)^2} \Rightarrow$$

$$C_2 + D_2 = \sqrt{\left(C + 2\sqrt{b \cdot c} + b\right)^2} + \sqrt{\left(C - 2\sqrt{b \cdot c} + b\right)^2} = 2(c + b).$$

Следовательно, (с учетом того, что $c + b > 0$) получим:

$$\frac{2 \cdot (A_2 + B_2)}{2 \cdot (C_2 + D_2)} = \frac{a + b}{c + b};$$

1. Рассмотрим числовой пример

Пусть $k = 2$; $n = 4$ и выполняется требования относительно чисел $\{a, b, c\}$ и соответственно равенства (2). Тогда справедливо равенство (это равенство (15) при $k = 2$).

$$\frac{A_4 + B_4}{C_4 + D_4} = \frac{a^2 + Cab + b^2}{C^2 + 6cb + b^2}; \tag{16}$$

Действительно, имеем:

$$\sqrt{2^4}\left(A_4 + B_4\right) = \sqrt{\left(2\alpha + 2\sqrt{\beta}\right)^4} + \sqrt{\left(2\alpha - 2\sqrt{\beta}\right)^4} =$$

$$= \sqrt{\left(\sqrt{a} + \sqrt{b}\right)^8} + \sqrt{\left(\sqrt{b} - \sqrt{a}\right)^8} = 2\left(a^2 + 6ab + b^2\right)$$

Аналогично

$$\sqrt{2^4} \cdot \sqrt{\left(\sqrt{c} + \sqrt{b}\right)^8} + \sqrt{\left(\sqrt{c} - \sqrt{b}\right)^8} = 2\left(c^2 + 6cb + b^2\right).$$

Таким образом, равенство (16) доказано.

Рассмотрим еще один пример на применение теорем 1 и 2. Пусть $a = \cos\varphi$; $b = \sin\varphi$; $c = \sin\varphi + \cos\varphi$; $\frac{\pi}{4} \le \varphi < \frac{\pi}{2}$. Тогда в соответствии равенств (2) и теоремы 1; 2 получим тождества:

1) $$\sqrt{\frac{\cos\varphi + \sin\varphi}{2} + \sqrt{\frac{\sin 2\varphi}{2}}} + \sqrt{\frac{\cos\varphi + \sin\varphi}{2} - \sqrt{\frac{\sin 2\varphi}{2}}} =$$

$$= \sqrt{\frac{\cos\varphi + 2\sin\varphi}{2} + \sqrt{\frac{2\sin^2\varphi + \sin 2\varphi}{2}}} - \sqrt{\frac{\cos\varphi + 2\sin\varphi}{2} - \sqrt{\frac{2\sin^2\varphi - \sin 2\varphi}{2}}};$$

2) $$\frac{\sqrt{\left(\frac{\sin\varphi + \cos\varphi}{2} + \sqrt{\frac{\sin 2\varphi}{2}}\right)^2} + \sqrt{\left(\frac{\sin\varphi + \cos\varphi}{2} - \sqrt{\frac{\sin 2\varphi}{2}}\right)}}{\sqrt{\left(\frac{2\sin\varphi + \cos\varphi}{2} + \sqrt{\frac{2\sin^2\varphi + \sin 2\varphi}{2}}\right)^2} + \sqrt{\left(\frac{2\sin\varphi + \cos\varphi}{2} - \sqrt{2\sin^2\varphi + \sin 2\varphi}\right)^2}} =$$

$$= \frac{\sin\varphi + \cos\varphi}{2\sin\varphi + \cos\varphi};$$

Полученные результаты в теоремах 1 и 2 позволяют получать многочисленные практические и теоретические примеры, но мы на этом остановимся.

Далее рассмотрим об оценке одного числового ряда

II О двойном неравенстве для одного числового ряда.

Покажем, что при любом натуральном числе n имеет место

$$1<\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{3n}+\frac{1}{3n+1}<2$$

Обозначим нашу сумму через S_n. Имеем:

$$S_n=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{2n}+\frac{1}{2n+1}+\frac{1}{2n+2}+\ldots+\frac{1}{3n}+\frac{1}{3n+1}=\sum_{m=1}^{2n+1}\frac{1}{n+m}.$$

Далее сгруппируем члены нашего ряда следующим образом:

$$S_n=\frac{1}{2n+1}+\left[\frac{1}{(2n+1)-1}+\frac{1}{(2n+2)+1}\right]+\left[\frac{1}{(2n+1)-2}+\frac{1}{(2n+1)+2}\right]+\ldots$$

$$\ldots+\left[\frac{1}{(2n+1)-n}+\frac{1}{(2n+1)+n}\right].$$

Для любого $k=1,2,\ldots,n$ получаем:

$$\frac{1}{(2n+1)-k}+\frac{1}{(2n+1)+k}=\frac{4n+2}{(2n+1)^2-k^2}>\frac{4n+2}{(2n+1)^2}=\frac{2}{2n+1}.$$

Поэтому

$$S_n>\frac{1}{2n+1}+n\cdot\frac{2}{2n+1}=1.$$

Оценка снизу получена.

С другой стороны, имеем

$$\frac{1}{3n}+\frac{1}{3n+1}<\frac{1}{2n}+\frac{1}{2n}=\frac{1}{n}$$

и, заменяя остальные слагаемые нашей суммы большим числом $\frac{1}{n}$, получаем:

$$S_n<(2n-1)\cdot\frac{1}{n}+\frac{1}{n}=2\,.$$

Приведем некоторые числовые примеры

$$S_1=\sum_{m=1}^{3}\frac{1}{n+m}=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4};\quad S_2=\sum_{m=1}^{5}\frac{1}{n+m}=\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7};$$

$$S_3=\sum_{m=1}^{7}\frac{1}{n+m}=\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\ldots+\frac{1}{10};\ \text{и т.д.}$$

Каждый из них удовлетворяют двойному неравенству $1<S_1;\ S_2;\ S_3<2.$

Теперь рассмотрим задачу о распределении рациональных дробей. Имеет место утверждение.

Теорема 3. *Пусть* $m;\ n$ *- взаимно простые натуральные числа. Тогда среди дробей*

$$\frac{k(m+n)}{m};\ \frac{l(m+n)}{n};\ (k=1,2,\ldots,m-1;l=1,2,\ldots,n-1)$$

нет равных и не одна из этих дробей не является целым числом.

Доказательство. Будем исходить от противного. Если предположить, что $\frac{k(m+n)}{m}=\frac{l(m+n)}{n}$ для некоторых из указанных k и l, то отсюда следует $\frac{n}{m}=\frac{l}{k}$, что невозможно, ибо дробь $\frac{n}{m}$ несократимая и $l<n;\ k<m.$

Далее, если предположить, что некоторая дробь $\frac{k(m+n)}{m}$ есть целое число, то из взаимной простоты чисел $m+n$ и m и делимости $k(m+n)$ на m получаем делимость k на $m,$ что невозможно (так как $0<k<m$), аналогично рассматривается всякая дробь $\frac{l(m+n)}{n}$.

Далее докажем утверждение о распределении этих дробей в отрезках натурального ряда.

Теорема 4. *Пусть* $m; n -$ *взаимно простые натуральные числа;* $m > 1,\ n > 1$. *Рассмотрим* $(m+n-2)$ *дробей вида:*

(17) $$\frac{m+n}{n};\ \frac{2(m+n)}{m};\ldots;\frac{(m-1)(m+n)}{m};\ k = 1, 2, \ldots (m-1)$$

(18) $$\frac{m+n}{n};\ \frac{2(m+n)}{n};\ldots;\frac{(n-1)(m+n)}{n};\ l = 1, 2, \ldots (n-1)$$

Тогда эти дроби будут находится между соседними натуральными числами $q,\ q+1$ *где* $q = 1, 2, \ldots,\ m+n-2$ *содержится в точности одна из наших дробой из* (15) *и* (16).

Другими словами, если данные дроби изоброзить точками координатной оси, то в каждом из интервалов $(1;2), (2;3), \ldots,\ (m+n-2, m+n-1)$ числовой оси будет изображена ровно одна из данных дробей (рисунок 1).

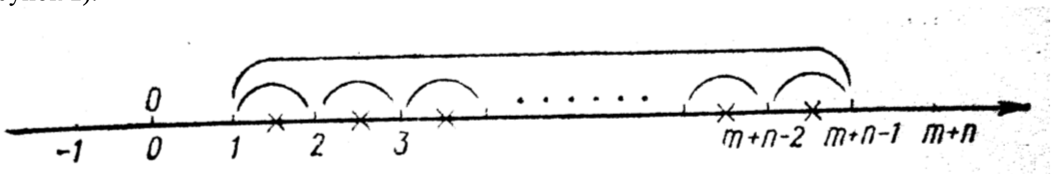

Рисунок 1.

Доказательство. Пусть $s -$ натуральное число и $s < m+n.$ Найдем количество наших дробей, заключенных между нулем и $s.$ Пусть $k -$ число дробей первого вида, которые меньше $s;\ l -$ количество дробей, второго вида, которые меньше $s.$ Тогда имеем

(19) $$\frac{k(m+n)}{m} < s < \frac{(k+1)(m+n)}{m};$$

(20) $$\frac{l(m+n)}{n} < s < \frac{(l+1)(m+n)}{n};$$

Отсюда вытекают, что

(21) $$k < \frac{sm}{m+n} < k+1 \Rightarrow (\text{из } (15))$$

(22) $$l < \frac{sn}{m+n} < l+1 \Rightarrow (\text{из } (16))$$

Почленно складывая соответствующие части этих соотношений получаем

(23) $$k+l < s < k+l+2;$$

Следовательно, между двумя целыми числами ($k+l$ и $k+l+2$) имеется единственно целое $s = k+l+1 \Rightarrow k+l = s-1.$

Таким образом, количество наших дробей, не превосходящих s, равно $s-1;$ т.е. $s \geq 2;$ (так как k и l одновременно нулями не будут).

В частности, между 0 и 1 нет заданных дробей. Между 1 и 2 содержится в точности одна заданная дробь, между 2 и 3 содержится в точности одна заданная дробь и т.д.

Таким образом, в общем случае количество дробей, содержащихся между двумя числами q и $q+1$ $(q = 1, 2, \ldots, m+n-2),$ равно $q-(q-1) = 1;$

Выводы из теорем 3; 4:

1) Если $(m,n) = 1$ то все дроби (15) и (16) различные.

2) Ни один из этих дробей не являются целым числом.

3) Между соседними натуральными числами $(q; q+1)$ $(q = 1, 2, \ldots, m+n-2)$ содержится в точности одна из наших дробей. Другими словами, если данные дроби изобразить точками на координатной прямой, то в каждом из интервалов $(q, q+1); (q = 1, 2, \ldots, m+n-2);$ числовой оси будет изображена ровно одна из данных дробей.

Данные результаты частично были доложены на конференции [6].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1 Бакаева М.С., Исмоилов Д.И., Сарбасова Н.Д. Курс лекций по теории вероятностей и математическая статистика. Республика Казахстан, – Павлодар, 2014. – 30 с.

2 Шахно К.У. Элементарная математика. – Москва, 1976.

3 Супрун В.П. Избранные задачи повышенной сложности по математике. – Минск, 1998.

4 Балаян. 1001 олимпиадные и занимательные задачи по математике. – Ростов-на-Дону: Феникс, 2007.

5 Ляпин С.Е, Евсеев А.Е. Алгебра и теория чисел. – 2015. – 158 с. п 3, 170 с. п 3-4.

6 Исмоилов Д., Жекебай Д, Хасанова Т. Об одном способе рационализации иррациональностей. Материалы IV Международной научно-практической конференции. 2-3 ноября 2016 года. – Том 3. – С. 12–16.

REFERENCES

1 Bakayeva M.S, Ismoilov D.I, Sarbasova N.D. Kurs lektsiy po teorii veroyatnostey i matematicheskaya statistika. Respublika Kazakhstan, – Pavlodar, 2014. – 30 s.

2 Shakhno K.U. Elementarnaya matematika. – Moskva, 1976.

3 Suprun V.P. Izbrannyye zadachi povyshennoy slozhnosti po matematike. – Minsk, 1998.

4 Balayan. 1001 olimpiadnyye i zanimatel'nyye zadachi po matematike. – Rostov-na-Donu: Feniks, 2007.

5 Lyapin S.Ye, Yevseyev A.Ye. Algebra i teoriya chisel. – 2015. – 158 s. p 3, 170 s. p 3-4.

6 Ismoilov D., Zhekebay D, Khasanova T. Ob odnom sposobe ratsionalizatsii irratsional'nostey. Materialy IV Mezhdunarodnoy nauchno-prakticheskoy konferentsii. 2-3 noyabrya 2016 goda. – Tom 3. – S. 12–16.

ТҮЙІН

Д. Исмоилов*, физика-математика ғылымдарының докторы,*
Т. Хасанова, Д. Жекебай
Инновациялық Еуразия университеті (Павлодар қ.)

Рационалдану және иррационалдануының кейбір үрдістері және бір сандық қатарды екіжақты бағалау

Жұмыста кейбір бөлшекті-иррационалды өрнектер қарастырылған және оларды бөлшекті-иррационалды өрнектерге келтіретін бекітулер дәлелденеді, сондай-ақ төменнен және жоғардан (екі жақты) бір қатарлы санға жалпы баға қарастырылады.

Түйін сөздер: *бөлшекті-иррационалды, бөлшекті-рационалды, бір сандық қатарды бағалау.*

RESUME

D. Ismoilov, *Doctor of Physics and Mathematics,*
T. Hasanova, D. Zhekebay
Innovative University of Eurasia (Pavlodar)

Some processes of irrational rationalization and two-sided evaluation of a single number series

In this article we consider some fractional-irrational expressions and prove the assertion that reduce them to fractional-rational expressions and also consider one general lower-and-upper bound (two-sided estimate) for one numerical series.

Ключевые слова: *fractional-irrational, fractional-rational, estimation of one numerical series.*