УДК 511.1

С.Л. Вересович
Калиновская СОШ Качирского района Павлодарской области,
Д. Исмоилов, доктор физико-математических наук
Инновационный Евразийский университет (г. Павлодар)
E-mail: sergei_veresovic@mail.ru

Применение комбинаторики к решению некоторых задач

Аннотация: *Данная статья раскрывает возможность решения жизненных ситуаций при помощи комбинаторных коэффициентов и показывает практичность применения формул по теории вероятностей и математической статистики. Решения задач с помощью комбинаторных коэффициентов состоит в основном в разложение данных коэффициентов по основным формулам и их преобразованиям.*

Ключевые слова: *Комбинаторика, перестановки, комбинаторные методы, перестановки с повторением.*

Комбинаторика – ветвь математики, изучающая комбинации и перестановки предметов, – возникла в XVII в. Долгое время казалось, комбинаторика лежит вне основного русла развития математики и ее приложений. Положение дел резко изменилось после появления быстродействующих вычислительных машин и связанного с этим расцвета конечной математики. В математике комбинаторика используется при изучении конечных геометрий, комбинаторной геометрии, теории представлений групп, неассоциативных алгебр и т.д.

Сейчас комбинаторные методы применяются в теории случайных процессов, статистике, математическом программировании, вычислительной математике, планировании экспериментов и, конечно же, в экономическом обосновании числовых лотерей.

Комбинаторика изучает способы выборки и расположения предметов, свойства различных конфигураций, которые можно образовать из элементов (причем элементами могут быть числа, фигуры, карты и т.п.). Характерной чертой комбинаторных задач является то, что в них речь идет всегда о конечном множестве элементов. С точки зрения теории множеств комбинаторика изучает подмножества конечных множеств, их объединение и пересечение, а также различные способы упорядочивания этих подмножеств. Далее рассмотрим задачу на применение комбинаторных формул.

«Очередь в кассу».

У кассы кинотеатра стоит очередь из m+k человек, причем m человек имеют тенге, а k – полтинники (монеты по 50 тиын). Билет в кино стоит 50 тиын, и в начале продажи билетов касса пуста. Сколькими способами могут располагаться в очереди люди с тенге и полтинниками так, что очередь пройдет без задержки, т. е. никому не придется ждать сдачу!

Например, если m = k = 2, то благоприятными будут лишь два случая: титнтитн и тититнтн, где «ти» означает полтинник, а «тн» – тенге. В четырех же случаях – тнтнтити, тнтитнти, тнтититн и титнтнти – возникает задержка. В первых трех случаях уже первый зритель не сможет получить сдачи, а в последнем случае у кассы задержится третий зритель.

При небольших значениях m и k задачу можно решить прямым перебором. Но если m и k сравнительно велики, то прямой перебор не поможет. Ведь число различных перестановок из m тенге и k полтинников равно $P(m,k)=\dfrac{(m+k)!}{m!k!}$. Уже при m = k = 20 число перестановок из 20 тенге и 20 полтинников равно $P(20;20)=\dfrac{(40)!}{20!20!}$, а это число больше СТА миллиардов.

Итак, нам надо решить следующую комбинаторную задачу.

Найти число перестановок с повторениями из m тенге и k полтинников, таких, что для любого r, $1\le r\le m+k$, число полтинников среди первых r элементов перестановки не меньше числа тенге.

Ясно, что искомое число отлично от нуля лишь при условии, что $m \le к$ – иначе полтинников заведомо не хватит, чтобы дать сдачу всем владельцам тенге.

Как и во многих комбинаторных задачах, здесь полезно использовать геометрическую иллюстрацию. Возьмем координатную сетку и будем изображать каждую перестановку тенге и полтинников ломаной, соединяющей узлы сетки по следующим правилам: ломаная начинается в начале координат O (0; 0); каждому полтиннику соответствует звено ломаной, идущее вверх направо, а каждому тенге – звено, идущее вверх налево (звено соединяет противоположные точки одного из квадратов координатной сетки). Например, последовательности соответствует ломаная, изображенная на рисунок 1.

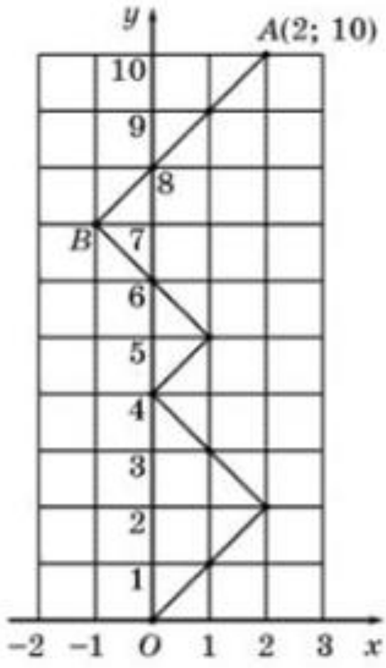

Рисунок 1 – Геометрическая иллюстрация

Ясно, что если в последовательности имеется m тенге и *к* полтинников. то концом ломаной окажется точка *A(к - m; к + m).* Число ломаных, ведущих из точки *O* в точку А, равно числу перестановок с повторениями из *m* тенге и *k* полтинников, т. е. *P(m, к).* Выясним теперь, чем характеризуются ломаные, удовлетворяющие условию задачи. Если очередь в какой-то момент времени застопорилась, то это значит, что число тенге к этому моменту оказалось на 1 больше числа полтинников. Но тогда точка, движущаяся по ломаной, сделает влево на один шаг больше, чем вправо, и окажется на прямой х = -1 (для ломаной на рис. 1 на этой прямой лежит точка В(-1; 7); она указывает, что очередь остановится на 7-м шагу). Итак, всем перестановкам, при которых очередь останавливается и какой-то момент, соответствуют ломаные, имеющие точки на прямой *x* = -1. Обратно, если у ломаной есть точка на этой прямой, то очередь остановится.

Мы пришли, таким образом, к следующей геометрической задаче: *найти число ломаных указанного вида, не пересекающих прямую x = -1.*

Здесь, как часто бывает в комбинаторных задачах, выгоднее искать число «неблагоприятных» случаев, т. е. случаев, когда очередь задерживается. Если мы найдем это число, то, вычтя его из числа $P(k,m) = C_{m+k}^{m}$ всех перестановок *m* тенге и k полтинников (общего число ломаных), получим ответ для нашей задачи.

Значит, получилась задача об отыскании числа ломаных, пересекающих прямую *x = -1.* Но если ломаная *L* пересекает прямую *x =-1,* то ее можно преобразовать следующим образом: взять наивысшую точку пересечения и часть ломаной L выше этой точки симметрично отразить в прямой х = -1. Такое преобразование ломаной *L* в *L´* показано на рисунок 2. При этом преобразовании точка *A(k - m; k + m),* лежащая справа от прямой *x* = -1, переходит в симметричную ей точку *A'(m - к* - 2; *к* + m), лежащую слева от прямой *x* = -1. Таким образом, каждому пути *из О в А,* пересекающему прямую *x* = -1, выражается формулой

$$P(m,k) - \mathrm{P(k+1, m-1)} = \mathrm{C}_{\mathrm{k+1}}^{k-m+1} C_{m+k}^{m} \tag{1}$$

Итак, количество очередей, при которых не происходит задержки, равно $\dfrac{k-m+1}{k+1} C_{m+k}^{m}$, где k – число полтинников, *m* – число тенге. В частности, если k=*m,* то очередь пройдет без задержки в $\dfrac{1}{k+1} C_{2k}^{k}$ случаях и задержится в $\dfrac{k}{k+1} C_{2k}^{k}$ случаях. При больших *k*= *m* очередь чаще всего задержится. Наша задача полностью решена.

Рассмотрим теперь некоторое обобщение этой задачи.

Кассир был предусмотрителен и в начале продажи билетов в кассе уже лежало q полтинников. Во скольких случаях пройдет без задержки очередь, состоящая из m обладателей тенге и k обладателей полтинников?

Геометрическое представление этой задачи будет почти таким же. Только запретной прямой теперь будет прямая $x = - q - 1$ (наличие q полтинников в кассе позволяет ломаной уклониться на q единиц влево без задержки очереди, а уклониться на q+ 1 единиц оно уже не имеет права). Поэтому теперь $A'(m - \kappa - 2q - 2;\ \kappa + m)$, у L' звеньев влево $\kappa + q + 1$, звеньев вправо $m - q - 1$, число неблагоприятных перестановок будет

$P(k + q + 1, m - q - 1)$, а число благоприятных равно

$$C_{m+k}^{m} - C_{m+k}^{m-q-1} \tag{2}$$

Если при этом $m \le q$, то очередь наверняка пройдет без задержки – полтинников, которые были в кассе с самого начала, хватит, чтобы удовлетворить всех владельцев тенге.

Если же $m > k + q$, то очередь наверняка задержится – общего числа полтинников в кассе и в очереди не хватит, чтобы дать сдачу всем владельцам тенге.

В процессе прохождения очереди могли быть моменты, когда в кассе не оставалось ни одного полтинника, и очередь не останавливалась лишь потому, что покупавший в этот момент билет был как раз обладателем полтинника. Подсчитаем число расстановок, при которых ни разу не будет такого критического момента. Иными словами, решим такую задачу.

Сколькими способами можно расставить обладателей m тенге и k полтинников так, чтобы в любой момент (исключая, быть может, начальный и конечный) в кассе был хотя бы один полтинник?

Эта задача тоже решается методом подсчета ломаных. Но теперь надо искать ломаные, пересекающие прямую $x = 0$ лишь в начале координат и (при $m = k$) в точке $A(0;\ 2k)$. Поскольку из условия задачи ясно, что впереди должны стоять два обладателя полтинника, то первого из них можно отвести в сторону, и тогда получим решенную выше задачу, но для случая, когда на m тенге приходится k - 1 полтинник. Поэтому число благоприятных расстановок при $m < k$ равно

$$C_{m+k-1}^{m} - C_{m+k-1}^{m-1} = \frac{k-m}{k} C_{m+k-1}^{m}$$

Если же $m = k$, то надо отвести в сторону и замыкающего очередь обладателя тенге. Мы получим ответ $\frac{1}{k} C_{2k-2}^{k-1}$.

Важное следствие. Обозначим через T_n число $\frac{1}{n+1} C_{2n}^{n}$ показывающее, во скольких случаях проходит без задержки очередь из обладателей n тенге и n полтинников. Мы докажем сейчас, что эти числа удовлетворяют рекуррентному соотношению

$$T = T_0 T_{n-1} + T_1 T_{n-2} + \ldots + T_{s-1} T_{n-s} + \ldots + T_{n-1} T_0 \tag{3}$$

Для доказательства разобьем все варианты на классы, отнеся к s-му классу очереди, в которых лишь после того, как пройдут 2s покупателей, в первый раз обнаруживают отсутствие в кассе полтинников. В этом случае среди первых 2s покупателей имеется s человек с полтинниками и s человек с тенге, а число способов расстановки, при которых в кассе на первых 2s - 1 шагах был хотя бы один полтинник, равно, как мы видели, $\frac{1}{s} C_{2s-2}^{s-1} = T_{s-1}$. Среди оставшихся $2n$ - 2s людей у n - s *тенге* и у n - s полтинники. Расставить их так, чтобы очередь и потом прошла благополучно, можно T_{n-s} способами.

Всего по правилу произведения получаем, что в s-м классе будет $T_{s-1}T_{n-s}$ расстановок. А так как общее число благополучных расстановок равно T, то выполняется равенство (3). При этом $T_0 = 1$.

Соотношение (3) встречается во многих задачах. Например, пусть имеется сантиметровая лента («портновский метр») длиной n + 1 см, которую надо разрезать на кусочки длиной 1 см. Причем режут ее, экономя усилия. На первом шагу производят разрез в некотором месте. На втором шагу намечают места разрезов двух полученных частей, накладывают их друг на друга соответствующим образом и одним взмахом ножниц производят разрез. На третьем шагу так же разрезают полученные четыре части и т. д. (если какая-нибудь часть имеет длину 1 см, то она не подвергается дальнейшим разрезам). Например, если от ленты длиной 2^k см каждый раз отрезать 1 см, то потребуется 2^k-1 разрезов, а если резать все получающиеся части пополам, то хватит k разрезов.

Можно доказать, что число B_n таких процессов, заканчивающихся разрезанием ленты на n + 1 сантиметровых кусочков, равно T_n (два процесса считаются различными, если хотя бы на одном шагу они приводят к разным результатам). Доказательство основано на том, что процессы разрезания представляют в виде объединения n классов, где в s-й класс попадают разрезания, при которых на первом шагу левая часть имеет длину s см. Это сразу приводит к рекуррентному соотношению для B_n, совпадающему с соотношением (3) для T_n . Так как, кроме того, $B_0 = T_0 = 1$, то для всех n имеем:

$$B_n = T_n = \frac{1}{n+1} C_{2n}^{n}.$$

Выведенные в предыдущих пунктах формулы позволяют установить дальнейшие свойства числа сочетаний С. Разобьем на классы все неблагоприятные перестановки из $\boldsymbol{m}$ букв «тн» и k букв «тг» – при которых очередь в кассу задерживается. Отнесем к s-му классу все перестановки, для которых задержка впервые происходит на месте 2s + 1, тогда перед ним стоит s букв «тн» и s букв «ти», на нем стоит буква «тн», а очередь вплоть до этого места проходит без задержки. Ясно, что s может принимать значение 0, 1, 2, ..., m - 1. Найдем, сколько перестановок входит в s-й класс. На первых 2s местах могут стоять любые благоприятные перестановки из s букв «тн» и s букв «ти» – ведь до места 2s + 1 очередь не останавливается. Как мы видели, число таких перестановок равно $\frac{1}{s+1} C_{2s}^{s}$. Далее, на месте 2s + 1 стоит буква «тн», а после нее - любая перестановка оставшихся m - s - 1 букв «тн» и k - s букв «ти». Число этих перестановок равно $P(m-s-1, k-s) = C_{m+k-2s-1}^{m-s-1}$ Таким образом, в силу правила произведения число неблагоприятных перестановок s-го класса равно $\frac{1}{s+1} C_{2s}^{s} C_{m+k-2s-1}^{m-s-1}$. Так как общее число неблагоприятных перестановок равно C_k, а число классов равно $\boldsymbol{m}$ - 1, то получаем при $\boldsymbol{m}$ < k соотношение

$$C_0^0 C_{m+k-1}^{m-1} + \frac{1}{2} C_2^1 C_{m+k-3}^{m-2} + \frac{1}{3} C_4^2 C_{m+k-5}^{m-3} + ... + \frac{1}{m} C_{2m-2}^{m} C_{k-m}^{0} + 1 = C_{m+k}^{m-1} \tag{4}$$

Это соотношение является частным случаем формулы

$$\sum_{s+q}^{m-1} (C_{2s-q}^{s} - C_{2s-q}^{s-q-1}) C_{m+k+q-2S-1}^{m-s-1} = C_{m+k}^{m-q-1} , \tag{5}$$

где $q < m \le k + q$ (появляющееся C_q^{-1} считается равным нулю).

Формула (5) обобщает (4) на случай, когда у кассира было в запасе q полтинников.

2. Еще одно соотношение между числами C_n^m получается следующим образом. Зададим число l, $1 \le l \le m$, и разобьем множество всех благоприятных перестановок на классы, отнеся к s-му классу все перестановки, содержащие среди первых l элементов ровно s букв «тн». Тогда число букв «ти» среди первых l элементов равно l - s. Так как букв «ти» должно быть не меньше, чем букв «тн», то s удовлетворяет неравенствам $0 \le 2s \le l$. Найдем число перестановок в s-$м$ классе. Каждая такая перестановка распадается на две части: одна состоит из первых l букв, а другая - из последних k + m - l букв. В первую часть входит l - s букв «ти» и s букв «тн». При этом так как вся перестановка благоприятна, то и ее часть, состоящая из первых l букв, тоже благоприятна. А из l - s букв «ти» и s букв «тн» можно составить $\frac{l-2s+1}{l-s+1} C_l^s$, таких перестановок. После того как пройдет первая часть перестановки, в кассе будет l - $2s$ полтинников. Вторая часть перестановки состоит из k - l + s букв «ти» и m - s букв «тн». Число перестановок, при которых эта часть очереди проходит без задержки, вычисляется по формуле (2) п. 2, в которой надо заменить q на l - $2s$, m на m - s и k на k - l + s. Из этой формулы вытекает, что вторая часть перестановки может быть выбрана $C_{m+k-l}^{m-s} - C_{m+k-l}^{m+s-l-1}$ способами. По правилу произведения получаем, что число перестановок в s-м классе равно

$$\frac{l-2s+1}{l-s+1}C_l^5(C_{m+k-l}^{m-s}-C_{m+k-l}^{m+s-l-1})$$

Так как общее число благоприятных перестановок из k букв «ти» и m букв «тн» равно $\frac{k-m+1}{k+1}C_{m+k}^{m}$ то получаем тождество

$$\sum_{s=0}^{[l/2]}\frac{l-2s+1}{l-s+1}C_l^s(C_{m+k-l}^{m+l}-C_{m+k-l}^{m+s-l-1})=\frac{k-m+1}{k+1}C_{m+k}^{m} \quad (6)$$

Здесь через *[l/2]* обозначена целая часть числа $\frac{l}{2}; C_r^p$ считается равным нулю при $p < 0$.

Обращаем внимание на то, что при решении задач можно использовать и приведенные ниже тождества:

Ниже приводим утверждения связанные с комбинаторными коэффициентами C_n^k ,на базе тождества профессора Исмоилова Д, которую приводим в виде леммы: Если имеет место, хотя бы одно из равенств

$a=b+c;$ и $b=a+c;$ или $c=a+b$, тогда справедливо тождество:

$$2(a^4+b^4+c^4)=(a^2+b^2+c^2)^2 \quad (1)$$

Утверждение: Имеет место равенства:

1. $2(C_n^k)^4+(C_{n-1}^k)^4+(C_{n-1}^{k-1})^4=\left[(C_n^k)^2+(C_{n-1}^k)^2+(C_{n-1}^{k-1})^2\right]^2$

Для всех k=1,2,3…….n-1 доказательство проводится на основании равенства $C_n^k=C_{n-1}^{k-1}+C_{n-1}^k$.

Следствие:

$$k=1; \qquad 2(n^4+(n-1)^4+1)=(n^2+(n-1)^2+1)^2$$

$$k=2;$$

$$2(n(n-1)^4+\left(\frac{(n-2)(n-1)}{2}\right)^4=\left[\left(\frac{n(n-1)}{2}\right)^2+\frac{(n-2)(n-1)}{2}^2+(n-1)^2\right]^2$$

$$C_{n-1}^k=\frac{n!(n-k)}{nk!(n-k)!}=C_n^k\,\frac{n-k}{n};$$

$$C_{n-1}^{k-1}=\frac{(n-1)!}{(k-1)!((n-1)-k-1))!}=\frac{n!k}{nkk!(n-k)!}=C_n^k\cdot\frac{k}{n};$$

$$C_{n-1}^k+C_{n-1}^{k-1}=C_n^k\left(\frac{n-k}{n}+\frac{k}{n}\right)=C_n^k;$$

$$C_n^k=C_{n-1}^k+C_{n-1}^{k-1}$$

$$a=C_n^k$$

$$b=C_{n-1}^k$$

$$c=C_{n-1}^{k-1}$$

$$a=b+c$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1 Исмоилов Д., Бокаева М.С., Сарбасова Н.Д. Курс лекций по теории вероятностей и математической статистики. – Павлодар, 2014. – 429 с.

2 Сапожников П.Н., Макаров А.А, Радионова М.В. Теория вероятностей, математическая статистика в примерах, задачах и тестах / Учебник, Новый Книжный Центр. – Москва 2016. – 496 с.

3 Крицкий О.Л., Михальчук А.А., Трифонов А.Ю., Шинкеев М.Л. Теория вероятностей и математическая статистика / Учебное пособие: ТПУ. – Томск, 2010. – 245 с.

REFERENCES

1 Ismoilov D., Bokaeva M.S., Sarbasova N.D. Kurs lektsiy po teorii veroyatnostey i matematicheskoy statistiki. - Pavlodar, 2014. – 429 s.

2 Sapozhnikov P.N., Makarov A.A, Radionova M.V. Teoriya veroyatnostey, matematicheskaya statistika v primerah, zadachah i testah / Uchebnik, Novyiy Knizhnyiy Tsentr. – Moskva, 2016. – 496 s.

3 Kritskiy O.L., Mihalchuk A.A., Trifonov A.Yu., Shinkeev M.L. Teoriya veroyatnostey i matematicheskaya statistika / Uchebnoe posobie: TPU. – Tomsk 2010. – 245 s.

ТҮЙІН

С.Л. Вересович, *Калиновка ЖОББМ*
Павлодар облысы Қашыр ауданы,
Д. Исмоилов*, физика-математика ғылымдарының докторы*
Инновациялық Евразия университеті (Павлодар қ).

Кейбір проблемаларды шешу үшін комбинаториканы пайдалану

Бұл мақала өмірлік мәселелерді комбинаторлық коэффициенттер арқылы шешудегі мүмкіндікті ашып, ықтималдықтар теориясының формулалары мен математикалық статистиканың қолдануының тәжірибелік мәнін көрсетеді. Комбинаторлық коэффициенттер арқылы, есеп шығару негізінен берыл коэффициенттерді негізгі формулалар мен оларды түрлендіру арқылы жүзеге асады.

Түйін сөздер: *комбинаторлық әдістер, алмастырулар, қайталанбалы алмастырулар.*

RESUME

S.L.Veressovich, *Kalinov Secondary General School*
Kachir district of Pavlodar region,
D. Ismoilov, *Doctor of Physical and Mathematical Sciences*
Innovative University of Eurasia (Pavlodar)

The application of combinatorics to the solution of certain tasks

This article reveals the possibility of solving life situations with combinatorial coefficients and shows the practicality of applying formulas on the theory of probability and mathematical statistics. The solution of tasks with combinatorial coefficients consists mainly in the decomposition of these coefficients by the basic formulas and their manipulations.

Keywords: *combinatorics, permutation, combinatorial methods, permutation with repetition.*