

$$= (x_1 + x_2 + x_3) \cdot \frac{(x_1x_2 + x_2x_3 + x_1x_3)}{x_1 \cdot x_2 \cdot x_3} =$$

$$= 1 \cdot \left(-\frac{\beta}{\alpha}\right) \cdot \left(-\frac{\beta}{\alpha}\right)^{-1} = -1$$

Имеет место общее утверждение:

Теорема 4. Пусть $x^3 + ax^2 + bx + c$ – кубический многочлен третьей степени, с коэффициентами $a; b; c$, где $c \neq 0$, $x_1, x_2, x_3 \neq 0$ – корни, то

$$(x_1 + x_2 + x_3) \left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} \right) = \frac{(-a)b}{-c} = \frac{ab}{c},$$

то есть

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = -a \\ x_1x_2 + x_2x_3 + x_1x_3 = b \Rightarrow (x_1 + x_2 + x_3) \left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} \right) = \frac{(-a)b}{-c} = \frac{ab}{c} \\ x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 = -c \end{cases}$$

Следствие:

Пусть $a = b = c = 1$, тогда для корней кругового многочлена $P(x) = x^3 - x^2 + x - 1$ справедливо равенство:

$$(x_1 + x_2 + x_3) \left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} \right) = 1 \quad \text{и}$$

$$(x-1)(x+1)(x-1)(x+1) = x^4 - 1,$$

$$P(x) = \frac{x^4 - 1}{x - 1} = (x+1)(x-i)(x+i), \text{ где } i^2 = -1, \text{ а также}$$

$$(-1+i-i) \left(\frac{-1}{i} + \frac{1}{i} + \frac{1}{-i} \right) = 1.$$

В заключение хотелось бы отметить, что данная работа имеет важное значение для учителей-математиков, студентов, магистрантов, а также для школьников, готовящихся к олимпиаде.

Литература

1. Исмоилов И.Д., Жунусова Ж.Ж. Об одном нетрадиционном способе исследования квадратных трехчленов // Вестник Инновационного Евразийского университета. – 2012. - № 1 (45)
2. Чистяков Н.Н. Замечания к отделу о квадратных уравнениях // Московское просвещение. – 1935. – Вып. № 3.

УДК 511.72.74

ЧИСЛА ФИБОНАЧЧИ И ИХ ОБОБЩЕНИЕ

Б.А. Жумиров, магистрант, учитель

Областной казахско-турецкий лицей-интернат для одаренных детей (г. Павлодар)

E-mail: zhumirov@mail.ru

Берілген мақалада Фибоначчи сандарына қатысты кейбір сұрақтарды қарастырамыз. Сол сұрақтарды мұғалімдер оқушыларына есеп ретінде көрсете алады. Осы мақаланың мақсаты: Фибоначчи сандарның зерттеу және талқылауы, сонымен бірге, ерекше есептердің өзгеше жауаптарының базасын құру. Мақаланың мазмұны Фибоначчи сандардың тарихынан, анықтамасынан, қасиетерінен, есептерден және олардың өзгеше жауаптарынан құрастырылады.

В данной статье рассматриваются некоторые вопросы, связанные с числами Фибоначчи, которые преподаватели могли бы применять в обучении детей. Целью автора является подробное изучение и

описание чисел Фибоначчи, а также создание базы оригинальных задач требующих нестандартного решения. Содержание статьи состоит из истории чисел Фибоначчи, определения и свойств чисел Фибоначчи, формулировки задач и их решения.

In this article we look some questions related to the numbers of Fibonacci, which teachers can apply in teaching of children. Aim of article is to completely research and explain numbers of Fibonacci, also to create base of original questions, which need non-simple answers. This article contains history of Fibonacci, definitions and properties of Fibonacci numbers, problems and their original answers.

I. О числах Фибоначчи и их связь с тригонометрией

В этой части мы рассмотрим числа Фибоначчи (определение, свойства, ...), и их связь с тригонометрическими функциями, а также рассматриваются интересные вопросы, связанные с числами Фибоначчи, которые позволяют расширить кругозор читателя-математика. Подобные задания не часто рассматриваются в связи с специальностью свойств чисел Фибоначчи, хотя они являются существенным элементом теории чисел и прикладной математики (теории поиска, разрезания прямоугольника на сумму квадратов и др).

а) О числах Фибоначчи

Перед тем как объяснить свойства чисел Фибоначчи, рассмотрим следующую задачу:

«Сколько пар кроликов в год рождается из одной пары?»

«Некто поместил пару кроликов в некоем месте, огороженном со всех сторон стеной, чтобы узнать, сколько пар кроликов родится при этом в течение года, если порода кролика такова, что через месяц пара кроликов производит на свет другую пару, а рожают кролики со второго месяца после своего рождения».

Так как первая пара в первом месяце дает потомство, удвой, и в этом месяце окажутся 2 пары: из них одна пара, а именно первая, рождает в следующем месяце, так что во втором месяце оказывается 3 пары; у них в следующем месяце 2 пары будут давать потомство, так что в третьем месяце родятся ещё 2 пары кроликов и число пар кроликов в этом месяце достигнет 5; из них в этом же месяце будут давать потомство 3 пары, и число пар кроликов в четвертом месяце достигнет 8; в пятом месяце 5 пар произведут ещё 5 пар, что, в общем, будет 13, далее, в шестом рожают 8 пар и будет 21, в седьмом - 34, в восьмом - 55, в девятом - 89, в десятом - 144, в одиннадцатом - 233, в двенадцатом - 377. Действительно, на этих полях можно заметить, что складывается первое со вторым, второе с третьим, третье с четвертым, и так далее, до тех пор, пока мы не сложим десятое с одиннадцатым, т.е. 144 и 233 и не получим 377, и так можно производить до бесконечного количества месяцев.

Перейдем от кроликов к числам, и рассмотрим следующую последовательность:

$$u_1, u_2, u_3, \dots, u_n,$$

в которой каждый член равен сумме двух предыдущих членов, т. е. при всяком $n > 2$

$$u_n = u_{n-1} + u_{n-2}.$$

Такие последовательности, в которых каждый член определяется как некоторая функция предыдущих, часто встречаются в математике и называются рекуррентными. Если обратиться к важному частному случаю, когда $u_1 = 1$, и $u_2 = 1$, нетрудно проверить, что в этом случае первыми четырнадцатью членами будут числа:

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377,$$

которые уже встречались нам в задаче о кроликах. В честь автора этой задачи вся последовательность называется рядом Фибоначчи, а каждый его элемент называется числом Фибоначчи.

Сама последовательность, разумеется, имеет присущие ему свойства (на самом деле их много, но в дальнейшем будут показаны только те, которые понадобятся в решении следующих задач).

б) Об одной задаче связанной с теоретико-числовым свойством чисел Фибоначчи

Для начала рассмотрим интересную и элементарную задачу, которая позволяет вникнуть в суть теоретико-числовых свойств чисел Фибоначчи.

Задача:

Найти возрастающую арифметическую прогрессию с наименьшей разностью, состоящую из натуральных чисел и не содержащую ни одного числа последовательности Фибоначчи.

Решение:

На самом деле известно, что любая прогрессия представима в виде « $a_1 + d \cdot k$ », где k любое целое число, a_1 – первый элемент последовательности, а d – это разность прогрессии.

Из книги Н. Воробьева «Числа Фибоначчи» нам известно, что остатки от деления на m последовательных чисел Фибоначчи составляют периодическую последовательность с чистым периодом. Проверим для начала для $m=2$.

Сама последовательность Фибоначчи:

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 600, 977, 1577, 2554, 4131, 6685 ...

При делении на $m=2$, вышеуказанные числа дают в остатках:

1, 1, 0, 1, 1, 0, 1, 1, 0, и т.д.

Очевидно, что если после единицы стоит ноль, то следующие два остатка будут 1, 1, что совпадают с начальными двумя остатками. Очевидно, остатки периодичны. Н. Воробьев подробно рассмотрел доказательства периодичности последовательности Фибоначчи по любому модулю $m \in \mathbb{Z}_+$.

Для $m=2$ мы имеем все возможные вычеты по модулю $m=2$ (0 и 1). Это значит, что любая арифметическая прогрессия с разностью $d=2$, включает в себя бесконечно много чисел Фибоначчи.

Рассмотрим остатки при делении на $m=3$:

1, 1, 2, 0, 2, 2, 1, 0, 1, 1, 2, 0, 2, 2, 1, 0 и т.д. (с периодом 8)

Точно так же заметим, что мы имеем все возможные вычеты по модулю $m=3$.

Рассмотрим остатки при делении на $m=4$:

1, 1, 2, 3, 1, 0, 1, 1, 2, 3, 1, 0, 1, 1, 2, 3, 1, 0 и т.д. (с периодом 6)

Тут тоже имеем все возможные вычеты по модулю $m=4$.

Рассмотрим остатки при делении на $m=5$:

1, 1, 2, 3, 0, 3, 3, 1, 4, 0, 4, 4, 3, 2, 0, 2, 2, 4, 1, 0 и т.д. (с периодом 20)

Тут тоже имеем все возможные вычеты по модулю $m=5$.

Рассмотрим остатки при делении на $m=6$:

1, 1, 2, 3, 5, 2, 1, 3, 4, 1, 5, 0, 5, 5, 4, 3, 1, 4, 5, 3, 2, 5, 1, 0 и т.д. (с периодом 24)

Тут тоже имеем все возможные вычеты по модулю $m=6$.

Рассмотрим остатки при делении на $m=7$:

1, 1, 2, 3, 5, 1, 6, 0, 6, 6, 5, 4, 2, 6, 1, 0 и т.д. (с периодом 16)

Тут тоже имеем все возможные вычеты по модулю $m=7$.

Теперь рассмотрим остатки при делении на $m=8$.

1, 1, 2, 3, 5, 0, 5, 5, 2, 7, 1, 0 и т.д. (с периодом 12)

Очень интересно, замечаем, что нет вычетов 4 и 6.

Следовательно, наименьшая прогрессия должна быть вида $8k+4$, чтобы не включала в себе ни одного из чисел Фибоначчи. Теперь же, приступим к его доказательству.

Возьмём u_n как n -ый элемент последовательности Фибоначчи.

$u_1 = u_2 = 1$; $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$ для $n = 1, 2, 3, \dots$, числа $u_1, u_2, u_3, \dots, u_{14}$ дают при делении на 8 соответственно следующие остатки:

1, 1, 2, 3, 5, 0, 5, 5, 2, 7, 1, 0, 1, 1.

Отсюда видно, что $u_{13} - u_1$ и $u_{14} - u_2$ делимы на 8. Таким образом, можно сказать, что для $n = 1$ имеем, что $u_{n+12} - u_n$ делится на 8, и $u_{n+13} - u_{n+1}$ делится на 8.

Предположим теперь, что последние два соотношения выполняются для некоторых натурального n . Тогда $u_{n+12} - u_n + u_{n+13} - u_{n+1}$ тоже делима на 8.

И $u_{n+12} + u_{n+13} - (u_n + u_{n+1}) = u_{n+14} - u_{n+2}$.

Если выполняется для n , то имеет значение и для $n+1$. Отсюда индукцией по n получаем, что $u_{n+12} - u_n$ делима на 8 для $n = 1, 2, 3, 4, \dots$. Таким образом доказано, что последовательность остатков, получаемых

при делении на 8 последовательных чисел Фибоначчи, является периодической с чистым двенадцатичленным периодом.

Рассмотрение полученной выше последовательности остатков от деления на 8 первых четырнадцати членов последовательности Фибоначчи показывает, что остатками могут быть только числа 0, 1, 2, 3, 5 и 7.

Так как среди остатков нет чисел 4 и 6, то в прогрессиях $8k+4$ и $8k+6$ ($k = 1, 2, \dots$) не содержится ни одного члена последовательности Фибоначчи. Это, очевидно, арифметические прогрессии (составленные из натуральных чисел) с наименьшей возможной при этих условиях натуральной разностью.

Но может быть задача и такого типа:

Найти арифметическую прогрессию $ak+b$ ($k = 0, 1, 2, \dots$), где a и b – взаимно простые натуральные числа, не содержащие ни одного числа последовательности Фибоначчи.

Рассматривая далее остатки при делении для m при $m > 8$, постараемся найти ещё варианты, где не все вычеты присутствуют.

Рассмотрим остатки при делении на $m=9$:

1, 1, 2, 3, 5, 8, 4, 3, 7, 1, 8, 0, 8, 8, 7, 6, 4, 1, 5, 6, 2, 8, 1, 0 и т.д. (с периодом 24)

Тут тоже имеем все возможные вычеты по модулю $m=9$.

Рассмотрим остатки при делении на $m=10$:

1, 1, 2, 3, 5, 8, 3, 1, 4, 5, 9, 4, 3, 7, 0, 7, 7, 4, 1, 5, 6, 1, 7, 8 и т.д. (с периодом 60)

Мы не стали рассматривать весь период, но выше понятно, что присутствуют все возможные вычеты по модулю $m=10$.

Рассмотрим остатки при делении на $m=11$:

1, 1, 2, 3, 5, 8, 2, 10, 1, 0 и т.д. (с периодом 10)

В этой последовательности нет чисел 4, 6, 7 и 9.

Каждое число взаимно простое с 11, следовательно, $11k+4$ является решением.

Таким образом, исследуя, на первый взгляд, простую задачу, мы рассмотрели несколько немаловажных свойств чисел Фибоначчи.

6.3 Об одном аналитическом равенстве для чисел Фибоначчи.

Имеет место утверждение:

При всех $n \geq 2$:

$$u_n = \prod_{k=1}^{n-1} \left(1 - 2i \cos \frac{\pi k}{n}\right)$$

где:

u_n - n -ое число в последовательности Фибоначчи.

Для начала рассмотрим справедливость формулы на нескольких числах, например для $n = 1, 2, 3, 4, 5, 6$.

Рассмотрим сперва для $n=1$.

$$u_2 = 1 - 2i \cos \frac{\pi}{2} = 1 - 0 = 1 \quad \text{Что соответствует условию.}$$

$$u_3 = \left(1 - 2i \cos \frac{\pi}{3}\right) \left(1 - 2i \cos \frac{2\pi}{3}\right) = \left(1 - 2i \cdot \frac{1}{2}\right) \left(1 - 2i \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)\right) = (1-i)(1+i) = 1 - i^2 = 1 + 1 = 2$$

Для u_3 как видно тоже соответствует условию.

$$\begin{aligned} u_4 &= \left(1 - 2i \cos \frac{\pi}{4}\right) \left(1 - 2i \cos \frac{2\pi}{4}\right) \left(1 - 2i \cos \frac{3\pi}{4}\right) = \\ &= \left(1 - 2i \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}\right) (1 - 0) \left(1 - 2i \cdot \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right) = (1 - \sqrt{2}i) (1 + \sqrt{2}i) = 1 - 2i^2 = 1 + 2 = 3 \quad (\text{Соответствует}) \end{aligned}$$

Теперь надо показать для случая, когда $n = 5$. То есть доказать, что:

$$u_5 = \left(1 - 2i \cos \frac{\pi}{5}\right) \left(1 - 2i \cos \frac{2\pi}{5}\right) \left(1 - 2i \cos \frac{3\pi}{5}\right) \left(1 - 2i \cos \frac{4\pi}{5}\right) = 5$$

Перемножив крайние получим:

$$u_5 = (1 - 2i \cos \frac{\pi}{5})(1 - 2i \cos \frac{4\pi}{5})(1 - 2i \cos \frac{2\pi}{5})(1 - 2i \cos \frac{3\pi}{5})$$

Имея свойство $\cos \alpha = -\cos(\pi - \alpha)$

Получаем $\cos \frac{4\pi}{5} = -\cos \frac{\pi}{5}$ и $\cos \frac{3\pi}{5} = -\cos \frac{2\pi}{5}$. Подставляя значения:

$$\begin{aligned} u_5 &= (1 - 2i \cos \frac{\pi}{5})(1 + 2i \cos \frac{\pi}{5})(1 - 2i \cos \frac{2\pi}{5})(1 + 2i \cos \frac{2\pi}{5}) = \\ &= (1 + 4 \cos^2 \frac{\pi}{5})(1 + 4 \cos^2 \frac{2\pi}{5}) \end{aligned} \quad (1)$$

Теперь, чтобы решить далее, нам надо знать следующее свойство.

Мы знаем что $\sin \frac{\pi}{10} = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$

Действительно, зная свойства $\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$ и $\cos 2\alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha$, получаем:

$$\begin{aligned} \sin \frac{2\pi}{5} &= 2 \sin \frac{\pi}{5} \cos \frac{\pi}{5} = 4 \sin \frac{\pi}{10} \cos \frac{\pi}{10} \cos \frac{\pi}{5} = 4 \sin \frac{\pi}{10} \sin \frac{2\pi}{5} \cos \frac{\pi}{5} \\ \sin \frac{2\pi}{5} &= 4 \sin \frac{\pi}{10} \sin \frac{2\pi}{5} \cos \frac{\pi}{5} \\ 1 &= 4 \sin \frac{\pi}{10} \cos \frac{\pi}{5} \\ 1 &= 4 \sin \frac{\pi}{10} (1 - 2 \sin^2 \frac{\pi}{10}) \end{aligned}$$

Раскрывая скобки и перенося в одну сторону, получаем уравнение:

$$8 \sin^3 \frac{\pi}{10} - 4 \sin \frac{\pi}{10} + 1 = 0 \quad \leftrightarrow \quad 8x^3 - 4x + 1 = 0$$

Разложив на множители, получаем:

$$(2x - 1)(4x^2 - 2x - 1) = 0$$

Получаем три корня:

$$x_1 = \frac{1}{2}, \quad x_2 = \frac{-1 + \sqrt{5}}{4}, \quad x_3 = \frac{-1 - \sqrt{5}}{4}$$

Зная, что $\sin \frac{\pi}{10}$ есть положительное и не равно $\frac{1}{2}$, получаем $\sin \frac{\pi}{10} = \frac{-1 + \sqrt{5}}{4}$

Далее, как известно:

$$\cos \frac{\pi}{5} = 1 - 2 \sin^2 \frac{\pi}{10} = 1 - 2 \left(\frac{\sqrt{5}-1}{4} \right)^2 = 1 - 2 \left(\frac{6-2\sqrt{5}}{16} \right) = 1 - \left(\frac{3-\sqrt{5}}{4} \right) = \frac{1+\sqrt{5}}{4}$$

Окончательно имеем:

$$\cos \frac{2\pi}{5} = \cos \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{10} \right) = \sin \frac{\pi}{10} = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$$

Равенство доказано.

Найденное значение подставляем в (1) и получаем:

$$\begin{aligned} (1 + 4 \cos^2 \frac{\pi}{5})(1 + 4 \cos^2 \frac{2\pi}{5}) &= (1 + 4 \left(\frac{1+\sqrt{5}}{4} \right)^2)(1 + 4 \left(\frac{\sqrt{5}-1}{4} \right)^2) = \\ &= (1 + 4 \left(\frac{6+2\sqrt{5}}{16} \right))(1 + 4 \left(\frac{6-2\sqrt{5}}{16} \right)) = (1 + \frac{6+2\sqrt{5}}{4})(1 + \frac{6-2\sqrt{5}}{4}) = \\ &= \left(\frac{10+2\sqrt{5}}{4} \right) \left(\frac{10-2\sqrt{5}}{4} \right) = \left(\frac{100-20}{16} \right) = 5 \quad (\text{Соответствует условию}) \end{aligned}$$

Итак, мы показали, что наше утверждение верно в случае $n=5$.

И в последнюю очередь рассмотрим для $n = 6$.

$$\begin{aligned} f_6 &= (1 - 2i \cos \frac{\pi}{6}) (1 - 2i \cos \frac{2\pi}{6}) (1 - 2i \cos \frac{3\pi}{6}) (1 - 2i \cos \frac{4\pi}{6}) (1 - 2i \cos \frac{5\pi}{6}) = \\ &= (1 - 2i \frac{\sqrt{3}}{2}) (1 - 2i \frac{1}{2}) (1 - 0) (1 - 2i(-\frac{1}{2})) (1 - 2i(-\frac{\sqrt{3}}{2})) = \\ &= (1 - i\sqrt{3})(1 - i)(1 + i)(1 + i\sqrt{3}) = (1 + 3)(1 + 1) = 8 \end{aligned}$$

Мы убедились, что для $n=2, 3, 4, 5, 6$ начальное условие верное. Теперь постараемся доказать следующее утверждение:

$$u_n = \prod_{k=1}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} (1 + 4 \cos^2 \frac{\pi k}{n})$$

где $\lfloor x \rfloor$ – это целая часть числа x .

Доказательство:

Пусть $n = 2m+1$, тогда в произведении имеются ровно $2m$ сомножителей объединяя первое с последним, второе с предпоследним и т. д. до двух сомножителей стоящих рядом.

Количество пар принимает значение равно $\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor$.

Тогда:

$$(1 - 2i \cos \frac{k\pi}{n}) (1 - 2i \cos \frac{(n-k)\pi}{n}) = 1 - 2i(\cos \frac{k\pi}{n} + \cos \frac{(n-k)\pi}{n}) + 4i^2 \cos \frac{k\pi}{n} \cos \frac{(n-k)\pi}{n}$$

Зная утверждение $\cos(180 - \alpha) = -\cos \alpha$, имеем $\cos \frac{(n-k)\pi}{n} = -\cos \frac{k\pi}{n}$

Подставляя в значения, получим:

$$\begin{aligned} -2i(\cos \frac{k\pi}{n} + \cos \frac{(n-k)\pi}{n}) + 4i^2 \cos \frac{k\pi}{n} \cos \frac{(n-k)\pi}{n} &= 1 - 2i(\cos \frac{k\pi}{n} - \cos \frac{k\pi}{n}) - 4i^2 \cos \frac{k\pi}{n} \cos \frac{k\pi}{n} = \\ &= 1 - 2i(0) - 4(-1) \cos^2 \frac{k\pi}{n} = 1 + 4 \cos^2 \frac{k\pi}{n} \end{aligned}$$

Пусть $n=2m$ – четное число.

Кроме одного сомножителя $k = m = \frac{n}{2}$ все остальные также образуются попарно:

$$(1, n-1), (2, n-2), (3, n-3), \dots, (\frac{n-2}{2}, \frac{n+2}{2}).$$

Здесь тоже количество пар принимает значение равно $\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor$.

Отсюда легко заметить, что в обоих случаях выполняется теорема:

$$u_n = \prod_{k=1}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} (1 + 4 \cos^2 \frac{\pi k}{n})$$

В завершение рекомендуем прорешать следующие частные случаи основного равенства.

Случай, рекомендуемые для самостоятельного доказательства:

$$13 = \prod_{k=1}^3 (1 + 4 \cos^2 \frac{\pi k}{7}) \quad (1)$$

$$21 = \prod_{k=1}^3 (1 + 4 \cos^2 \frac{\pi k}{8}) \quad (2)$$

$$34 = \prod_{k=1}^4 \left(1 + 4\cos^2 \frac{\pi k}{9}\right) \quad (3)$$

$$55 = \prod_{k=1}^4 \left(1 + 4\cos^2 \frac{\pi k}{10}\right) \quad (4)$$

При рассмотрении нескольких случаев нам уже открылось несколько важных свойств чисел Фибоначчи. После этой задачи нам стало известно, что $\cos \frac{\pi}{5}$ является половиной «золотого сечения», что может нам понадобиться в будущем при решении задачи в общем случае.

Здесь приведены несколько задач для самостоятельного решения:

1. Найти $m, n \in \mathbb{Z}$, что $\frac{m^3+1}{mn-1} \in \mathbb{Z}$;
2. Найти $m, n \in \mathbb{Z}$, что $\frac{m^3+n^3+2}{mn-1} \in \mathbb{Z}$;
3. Показать корни следующего уравнения в соответствии с x, y .
 $xy + 1 = x + y + p$;
4. Решить следующую систему уравнений в целых числах:
 $x_1 + x_2 + x_3 = a$
 $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = b$
в частном случае при $a = 54$, и $b = 1406$;
5. Доказать, что все решения в целых числах уравнения:
 $y^2 = x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$
исчерпываются следующими парами:
 $x = 0, -1, 3$
 $y = \pm 1, \pm 1, \pm 11$
Привести доказательство отсутствия других решений.

УДК 576.895.122

**СЕЗОННАЯ ДИНАМИКА ПАРАЗИТОФАУНЫ МОЛОДИ КАСПИЙСКОГО ЛОСОСЯ
(*SALMO TRUTTA CASPIUS* KESSLER)
И РАДУЖНОЙ ФОРЕЛИ (*SALMO GAIRDNERI* RICH.)
В ЧАЙКЕНДСКОМ ЛОСОСЕВОМ РЫБОРАЗВОДНОМ ЗАВОДЕ**

*Т.К. Микаилов, д-р биол. наук, профессор,
Н.Э. Ибрагимова, научный сотрудник, Ф.Г. Рзаев, канд. биол. наук
лаборатория «Паразиты водных животных»
Институт Зоологии НАН Азербайджана (г. Баку)
E-mail: fuad.zi@mail.ru*

*Жұмыста албырт балықтардың екі түрінің: Чайкенд албырт балық өсіру зауытындағы Каспий албырты (*Salmo trutta caspius* Kessler) мен құбылмалы форель (*Salmo gairdneri* Rich.) құртшабақтарының паразит фаунасы бойынша деректер келтірілген. Жоғарыда аталған балықтардың паразит фаунасының маусымдық және жас ерекшелік динамикасының салыстырмалы талдауы жүргізілген.*

*В работе приведены данные по паразитофауне молоди двух видов лососевых: Каспийского лосося (*Salmo trutta caspius* Kessler) и радужной форели (*Salmo gairdneri* Rich.) в Чайкендском лососевом рыбозаводе. Проведен сравнительный анализ сезонной и возрастной динамики паразитофауны указанных рыб.*

*The paper presents data on the parasites of two salmonid species: Caspian salmon (*Salmo trutta caspius* Kessler) and rainbow trout (*Salmo gairdneri* Rich.) in Chaykend salmon factory. Was carried comparative analysis of the seasonal and age dynamics of salmon parasites.*

Введение. На протяжении двухвековой истории курунского рыболовства максимальный улов лосося отмечен в 1849 г. – 5 тыс. ц (около 33,5 тыс. рыб поголовья). В XX веке было отмечено значительное